التموضع المتبادل للأغلفة الخطية لمدارات مناحي التناظر الأربعة، والمتقاطعة بأربعة مستقيمات شكلت مستقيمين مضاعفين

د. عصام ديبان: أستاذ مساعد في قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة البعث.
حنان ابراهيم: طالبة دكتوراه في قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة البعث.

ملخص البحث:

ندرس في هذا البحث إحدى حالات تقاطع الأغلفة الخطية لمدارات مناحي تناظر السطوح الجبرية F_n المعطاة بالمعادلة:

$$R\left(y_1^2+\sum_{i=1}^{\lambda}\xi_i Z_i\right)+S\left(y_2^2+\sum_{j=1}^{\mu-1}\zeta_{\lambda+j}Z_{\lambda+j}\right)+$$

$$+T\left(y_3^2+\sum_{k=1}^{g-1}\chi_{r_1+k}Z_{r_1+k}\right)+P\left(y_4^2+\sum_{\ell=1}^{v-1}\psi_{r+\ell}Z_{r+\ell}\right)=c$$

عندما تتقاطع هذه الأغلفة بأربعة مستقيمات، وينطبق بعضها لتشكّل مستقيمين مضاعفين. ونوجد العلاقات التي تربط بين الدوال ξ,ζ,χ,ψ وكثيرات الحدود R,S,T,P ، ونحدد المتراجحة الهندسية الواجب تحققها، حتى يكون تموضع الغلاف الرابع عشوائياً.

كلمات مفتاحية: سطح جبري، غلاف خطي، منحى تناظر، مستوي تناظر، زمرة تامة.

Mutual arrangement of linear envelopes of the four orbits of symmetry directions, intersecting by four straights which form two multiple straights

Abstract:

In this research, we study one of the cases of intersection of linear envelopes for the orbits of symmetry directions of algebraic surfaces, given by the equation:

$$R\left(y_1^2+\sum_{i=1}^{\lambda}\xi_i Z_i\right)+S\left(y_2^2+\sum_{j=1}^{\mu-1}\zeta_{\lambda+j}Z_{\lambda+j}\right)+$$

$$+T\left(y_3^2+\sum_{k=1}^{g-1}\chi_{r_1+k}Z_{r_1+k}\right)+P\left(y_4^2+\sum_{\ell=1}^{v-1}\psi_{r+\ell}Z_{r+\ell}\right)=c$$

when theses envelopes intersect by four straights (in this case, two multiple straights). And we find the relationships between the functions ξ,ζ,χ,ψ ,and the polynomials R,S,T,P , then we define the geometric inequality, which makes the position of the fourth envelope random.

Keywords: Algebraic surface, linear envelope, symmetry direction, symmetry plane, complete group.

1. مقدمة:

أصبحت دراسة التموضع المتبادل للأغلفة الخطية لمدارات مناحي تناظر السطوح الجبرية F_n في الفضاء الإقليدي E^m، من أهم القضايا العلمية، وهذا ما اتضح بمتابعة دراسة النظرية الهندسية للامتغيرات الزمر.

وتمت دراسة هذه القضية بشكل كامل، من أجل ثلاثة مدارات [5], [6]، وأربعة مدارات غير متقاطعة، والمتقاطعة بمستقيم واحد [4], [7]، والمتقاطعة بمستقيمين مختلفين، وبثلاثة مستقيمات مختلفة، وبثلاثة مستقيمات عندما ينطبق اثنان منها [1], [2], [3], [8], [9], [10], [11] ، وتتم حالياً دراسة حالة تقاطع الأغلفة الخطية بأربعة مستقيمات مختلفة، وذلك ضمن أطروحة دكتوراه مسجلة في جامعة البعث للباحثة زينة جبر، أما في هذا البحث، فسنقوم بدراسة إحدى حالات تقاطع الأغلفة بأربعة مستقيمات، عندما ينطبق بعضها لتشكل مستقيمين مضاعفين.

2. هدف البحث:

نهدف للحصول على المتراجحات الهندسية، التي تعين الشرط النهائي للتموضع المتبادل لتلك الأغلفة الخطية، ويتم في هذا السياق إيجاد المعادلة القانونية للسطوح الجبرية الخاصة F_n، اللامتغيرة بالنسبة للزمر التامة G، وإيجاد معادلات مستويات تناظر هذه السطوح.

3. المناقشة والنتائج:

قبل البدء بدراسة معادلة السطح F_n لابد من إدخال بعض الرموز والمصطلحات اللازمة للدراسة:

Π^λ: الغلاف الأول، Π^μ:الغلاف الثاني، Π^ν:الغلاف الثالث، Π^v:الغلاف الرابع

$$\Pi^{\mathrm{r}_1} = \Pi^{\lambda} + \Pi^{\mu} \qquad , \qquad \Pi^{\mathrm{r}} = \Pi^{\mathrm{r}_1} + \Pi^{\nu}$$

$$\Pi^{\mathrm{r}_2} = \Pi^{\lambda} + \Pi^{\nu} \qquad , \qquad \Pi^{\mathrm{r}_3} = \Pi^{\mu} + \Pi^{\nu}$$

$$\Pi^{\mathrm{v}_\mathrm{t}} = \Pi^{\nu} \cap \Pi^{r_t} \quad ; \quad (t = 1,2,3)$$

$$\Pi^{\mathrm{g}} = \Pi^{\nu} \cap \Pi^{\mathrm{r}_1}$$

$$\lambda \geq \mu \geq \nu \geq \mathrm{v}$$

ليكن السطح F_n $(n > 2)$ غير الإسطواني، ذو زمرة التناظر التامة G، معطى في جملة الإحداثيات الديكارتية بالمعادلة:

$$R\left(y_1^2 + \sum_{i=1}^{\lambda} \xi_i Z_i\right) + S\left(y_2^2 + \sum_{j=1}^{\mu-1} \zeta_{\lambda+j} Z_{\lambda+j}\right) + \tag{1}$$

$$+T\left(y_3^2 + \sum_{k=1}^{g-1} \chi_{r_1+k} Z_{r_1+k}\right) + P\left(y_4^2 + \sum_{\ell=1}^{v-1} \psi_{r+\ell} Z_{r+\ell}\right) = c$$

حيث تتعلق كثيرات الحدود R, S, T, P والدوال الخطية $\xi_i\ , \zeta_{\lambda+j}\ , \chi_{r_1+k}\ , \psi_{r+\ell}$ بالمتحولات $x_\tau (\tau = \overline{1,\rho})$.

لندرس إحدى حالات تقاطع الأغلفة الخطية الأربعة بأربعة مستقيمات، في حال انطباق هذه المستقيمات وتحولها إلى مستقيمين مضاعفين، وهي حالة تقاطع الغلاف الأول مع الثاني والثالث بالمستقيم OZ_1 ، وتقاطع الغلاف الأول مع الثاني والرابع بالمستقيم OZ_λ أي:

$$\Pi^{\lambda} \cap \Pi^{\mu} \cap \Pi^{\nu} = OZ_1$$

$$\Pi^{\lambda} \cap \Pi^{\mu} \cap \Pi^{\mathrm{v}} = OZ_\lambda$$

أولاً: دراسة حالة $0 < \mathrm{v}_1 \leq \mathrm{v}\ ,\ \mathrm{v}_2 = \mathrm{v}_3 = 0 \quad (\Pi^{\mathrm{v}-1} \subset \Pi^r)$

في هذه الحالة تتحقق العلاقات:

$$\left.\begin{array}{lcl} R = R_0.\zeta_{\lambda+1} & , & S = R_0.\xi_\lambda \\ R = T_0.\chi_{r_1+1} & , & T = T_0.\xi_\lambda \\ R = P_0.\psi_{r+1} & , & P = P_0.\xi_{\lambda-1} \\ S = S_0.\psi_{r+1} & , & P = S_0.\zeta_{\lambda+2} \end{array}\right. \quad (2)$$

حيث:

$$\zeta_{\lambda+1} \neq c\xi_\lambda \quad , \quad \chi_{r_1+1} \neq c\xi_\lambda \quad , \quad \psi_{r+1} \neq c\xi_\lambda$$

من (2) نستنتج:

$$R_0.\zeta_{\lambda+1} = T_0.\chi_{r_1+1} \Rightarrow R_0 = \frac{T_0}{\zeta_{\lambda+1}}\chi_{r_1+1}$$

بوضع $R_1 = \frac{T_0}{\zeta_{\lambda+1}}$ نجد:

$$R_0 = R_1\chi_{r_1+1} \quad , \quad T_0 = R_1\zeta_{\lambda+1}$$

$$R_0.\zeta_{\lambda+1} = P_0.\psi_{r+1} \quad \Rightarrow$$

$$R_0 = P_1\psi_{r+1} \quad \& \quad P_0 = P_1\zeta_{\lambda+1} \quad ; \quad P_1 = \frac{P_0}{\zeta_{\lambda+1}}$$

$$R_0.\xi_\lambda = S_0.\psi_{r+1} \quad \Rightarrow$$

$$R_0 = S_1\psi_{r+1} \quad \& \quad S_0 = S_1\xi_\lambda \quad ; \quad S_1 = \frac{S_0}{\xi_\lambda}$$

$$P_0.\xi_\lambda = S_0.\zeta_{\lambda+2} \qquad \Rightarrow$$

$$P_0 = S_1\zeta_{\lambda+2} \qquad \& \qquad S_0 = S_1\xi_\lambda \qquad ; \quad S_1 = \frac{S_0}{\xi_\lambda}$$

ومنه فإن كثيرات الحدود R, S, T, P تأخذ الشكل:

$$R = R_1\chi_{r_1+1}\zeta_{\lambda+1} \qquad , \qquad S = R_1\chi_{r_1+1}\xi_\lambda$$

$$T = R_1\zeta_{\lambda+1}\xi_\lambda \qquad , \qquad P = R_1\frac{\chi_{r_1+1}}{\psi_{r+1}}\xi_\lambda\zeta_{\lambda+2}$$

لكن نجد من (2) أيضاً أن:

$$T_0\chi_{r_1+1} = P_0.\psi_{r+1} \quad \Rightarrow \quad \chi_{r_1+1} = c\psi_{r+1} \quad ; \quad c = \frac{P_0}{T_0}$$

ومنه فإن كثيرات الحدود R, S, T, P يمكن أن تأخذ الشكل:

$$\begin{matrix} R = R_1\chi_{r_1+1}\zeta_{\lambda+1} & , & S = R_1\chi_{r_1+1}\xi_\lambda \\ T = R_1\zeta_{\lambda+1}\xi_\lambda & , & P = R_1c\xi_\lambda\zeta_{\lambda+2} \end{matrix} \qquad (3)$$

ومن جهة أخرى ينتج من (2) أن:

$$\begin{matrix} \zeta_{\lambda+1} = c_1\chi_{r_1+1} & , & \zeta_{\lambda+1} = c_2\psi_{r+1} \\ \xi_\lambda = c_3\psi_{r+1} & , & \xi_\lambda = c_4\zeta_{\lambda+2} \end{matrix} \qquad (4)$$

الآن لنفرض أن:

$$\Pi^g = \Pi^{\mathrm{h}} \oplus \Pi^1(\mathrm{Z}_1)$$

يمكن تعيين المستوي Π^{h} في المستوي Π^{r_1} [4] بالمعادلات الآتية:

$$Z_{h+\varepsilon} = \sum_{p=1}^{h} a_{\varepsilon p} Z_p \quad ; \quad \varepsilon = \overline{1, \lambda - h}$$
$$Z_{\lambda+j} = \sum_{p=1}^{h} b_{jp} Z_p \quad ; \quad j = \overline{1, \mu - 2} \qquad (5)$$

حيث أن: $\sum_j b_{jp}^2 > 0 \quad , \quad rang\|b_{jp}\| = h$

لنأخذ في المستوي Π^{h} محاور إحداثية جديدة OZ'_p، عندها، واستناداً إلى ماسبق، يمكن اعتماد دساتير التحويل:

$$Z_p = Z'_p \quad ; \quad p = \overline{1, h}$$
$$Z_{h+\varepsilon} = Z'_{h+\varepsilon} + \sum_{p=1}^{h} a_{\varepsilon p} Z'_p \quad ; \quad \varepsilon = \overline{1, \lambda - h} \qquad (6)$$
$$Z_{\lambda+j} = Z'_{\lambda+j} + \sum_{p=1}^{h} b_{jp} Z'_p \quad ; \quad j = \overline{1, \mu - 2}$$

فتأخذ معادلة السطح F_n في الجملة الجديدة الشكل:

$$R\left(y_1^2 + \sum_{i=1}^{\lambda-h} \xi_{h+i} Z'_{h+i}\right) + S\left(y_2^2 + \sum_{j=1}^{\mu-2} \zeta_{\lambda+j} Z'_{\lambda+j}\right) +$$

$$+T\left(y_3^2+\sum_{p=1}^{h}\chi_p Z'_p+\sum_{k=1}^{g-1}\chi_{r_1+k}Z_{r_1+k}\right)+$$

$$+P\left(y_4^2+\sum_{\ell=1}^{\mathrm{v}-1}\psi_{r+\ell}Z'_{r+\ell}\right)=c \qquad (7)$$

حيث χ_p دوال خطية في المتحولات $(\omega=\overline{1,\rho}\geq 2)$ x_ω ، كما أن χ_p و χ_{r_1+k} تشكل جملة مستقلة خطياً، كون السطح F_n ليس أسطوانياً، ويمكن أن تعطى بالشكل:

$$\chi_p=\lambda_0^{-1}\left(\xi_p+\sum_{\varepsilon=1}^{\lambda-h}a_{\varepsilon p}\xi_{h+\varepsilon}\right)$$

$$=\lambda_1^{-1}\sum_{j=1}^{\mu-2}b_{jp}\zeta_j \qquad ;p=\overline{1,h} \qquad (8)$$

حيث λ_0 و λ_1 وسيطان حقيقيان اختياريان.

بتعويض قيم Z' في المعادلة الجديدة للسطح، والاستفادة من تعريف χ_p نجد أن:

$$T=\lambda_0 R+\lambda_1 S \qquad (9)$$

بالاستفادة من (2) و(9) نجد أن:

$$T_0\xi_\lambda=\lambda_0 R_0\zeta_{\lambda+1}+\lambda_1 R_0\xi_\lambda$$

$$T_0\xi_\lambda=R_0(\lambda_0\zeta_{\lambda+1}+\lambda_1\xi_\lambda)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{R_0}{T_0}=\frac{\xi_\lambda}{\lambda_0\zeta_{\lambda+1}+\lambda_1\xi_\lambda}$$

وأيضاً من جهة أخرى:

$$T_0\xi_\lambda = \lambda_0 T_0 \chi_{r_1+1} + \lambda_1 R_0 \xi_\lambda$$

$$T_0\left(\xi_\lambda - \lambda_0\chi_{r_1+1}\right) = \lambda_1 R_0 \xi_\lambda$$

$$\Rightarrow \quad \frac{R_0}{T_0} = \frac{\xi_\lambda - \lambda_0\chi_{r_1+1}}{\lambda_1\xi_\lambda}$$

ومنه:

$$\frac{R_0}{T_0} = \frac{\xi_\lambda}{\lambda_0\zeta_{\lambda+1} + \lambda_1\xi_\lambda} = \frac{\xi_\lambda - \lambda_0\chi_{r_1+1}}{\lambda_1\xi_\lambda} = \frac{\chi_{r_1+1}}{\zeta_{\lambda+1}} \qquad (10)$$

نستنتج:

$$\xi_\lambda = a_1(\lambda_0\zeta_{\lambda+1} + \lambda_1\xi_\lambda) \;\; \Rightarrow$$

$$\xi_\lambda = \frac{a_1\lambda_0}{1 - a_1\lambda_1}\zeta_{\lambda+1}\,; \;\; a_1 = \frac{\chi_{r_1+1}}{\zeta_{\lambda+1}} \qquad (11)$$

$$\xi_\lambda - \lambda_0\chi_{r_1+1} = a_1\lambda_1\xi_\lambda \quad \Rightarrow$$

$$\xi_\lambda = \frac{\lambda_0}{1 - a_1\lambda_1}\chi_{r_1+1} \qquad (12)$$

$$\chi_{r_1+1} = a_1\zeta_{\lambda+1} \qquad (13)$$

نتيجة: تحقق الدالتان χ_{r_1+1} و $\zeta_{\lambda+1}$ العلاقة (13) ، وترتبطان خطياً مع الدالة ξ_λ بالعلاقتين (11) و (12).

لمعرفة علاقة كثيرات الحدود والدوال الخطية ننطلق من (10)، فنجد:

$$R_0 = R_1\xi_\lambda$$

$$T_0 = R_1(\lambda_0\zeta_{\lambda+1} + \lambda_1\xi_\lambda) \qquad ; \qquad R_1 = \frac{T_0}{\lambda_0\zeta_{\lambda+1} + \lambda_1\xi_\lambda}$$

نعوض في (2) نجد:

$$\begin{aligned} R &= R_1\xi_\lambda\zeta_{\lambda+1} \\ S &= R_1\xi_\lambda^2 \\ T &= R_1(\lambda_0\zeta_{\lambda+1} + \lambda_1\xi_\lambda)\xi_\lambda \\ P &= R_1\frac{\xi_\lambda^2\zeta_{\lambda+2}}{\psi_{r+1}} \end{aligned} \qquad (14)$$

بالعودة إلى العلاقة (9) والاستفادة من (2) نجد أيضاً:

$$T_0\xi_\lambda = \lambda_0T_0\chi_{r_1+1} + \lambda_1S_0\psi_{r+1}$$

$$T_0\left(\xi_\lambda - \lambda_0\chi_{r_1+1}\right) = \lambda_1S_0\psi_{r+1}$$

ومنه:

$$\frac{T_0}{S_0} = \frac{\lambda_1}{\xi_\lambda - \lambda_0\chi_{r_1+1}}\psi_{r+1}$$

$$\Rightarrow \qquad T_0 = \frac{\lambda_1S_0}{\xi_\lambda - \lambda_0\chi_{r_1+1}}\psi_{r+1}$$

$$T_0 = S_1\psi_{r+1} \qquad ; \qquad S_1 = \frac{\lambda_1S_0}{\xi_\lambda - \lambda_0\chi_{r_1+1}}$$

$$S_0 = \frac{T_0}{\lambda_1\psi_{r+1}}\left(\xi_\lambda - \lambda_0\chi_{r_1+1}\right)$$

$$S_0 = \frac{S_1}{\lambda_1}\left(\xi_\lambda - \lambda_0 \chi_{r_1+1}\right)$$

نعوض T_0 و S_0 في (2) نجد:

$$\begin{aligned} R &= S_1 \psi_{r+1} \chi_{r_1+1} \\ S &= S_1 \frac{\xi_\lambda - \lambda_0 \chi_{r_1+1}}{\lambda_1} \psi_{r+2} \\ T &= S_1 \psi_{r+1} \xi_\lambda \\ P &= S_1 \frac{\xi_\lambda - \lambda_0 \chi_{r_1+1}}{\lambda_1} \zeta_{\lambda+2} \end{aligned} \qquad (15)$$

مبرهنة 1: عندما تتقاطع الأغلفة الخطية الأربعة وفق الآتي:

$$\Pi^\lambda \cap \Pi^\mu \cap \Pi^\nu = OZ_1$$

$$\Pi^\lambda \cap \Pi^\mu \cap \Pi^{\text{v}} = OZ_2$$

وبفرض أن $\text{v} \geq \text{v}_1 > 0$ $(\text{v}_2 = \text{v}_3 = 0)$ فإن السطح F_n يتعين بالمعادلة (7)، وعندها تعطى الدوال الخطية $\chi_p\left(p = \overline{1,h}\right)$ بالعلاقة (8)، وتحقق كثيرات الحدود R, S, T, P العلاقات (15).

ثانياً: دراسة حالة $\mathbf{v = v_1}$

بفرض أن $\text{v} = \text{v}_1$ $(\Pi^{\text{v}} \subset \Pi^{r_1})$، وباختيار مناسب للجملة الإحداثية $OZ_i(i = \overline{1, \lambda - 2})$ يمكن تعيين المستوي Π^{v} في Π^{r_1} بالعلاقات:

$$Z'_p = 0 \qquad ; \qquad p = \overline{1,h}$$

$$Z'_{h+\mathrm{v}-1+\sigma} = \sum_{q=1}^{\mathrm{v}-1} C_{\sigma q} Z'_{h+q} \quad ; \ \sigma = \overline{1, \lambda - h - \mathrm{v}} \qquad (16)$$

$$Z'_{\lambda+j} = \sum_{q=1}^{\mathrm{v}-1} d_{jq} Z'_{h+q} \quad ; \quad j = \overline{1, \mu - 2}$$

$rang\,\|d_{jq}\| = \mathrm{v} - 1 \quad , \quad \sum_{\mathrm{j}} \mathrm{d}_{\mathrm{jq}}^2 > 0$ حيث

إذا ما اخترنا في المستوي Π^{v} محاور إحداثية جديدة OZ''_{h+q} ، يمكن الحصول على دساتير تحويل الإحداثيات في المستوي Π^{r_1} بالعلاقات:

$$\begin{aligned}
&Z'_p = 0 \quad ; \quad p = \overline{1, h} \\
&Z'_{h+q} = Z''_{h+q} \quad ; \quad q = \overline{1, \mathrm{v} - 1} \\
&Z'_{h+\mathrm{v}-1+\sigma} = Z''_{h+\mathrm{v}-1+\sigma} + \sum_{q=1}^{\mathrm{v}-1} C_{\sigma q} Z''_{h+q} \ ; \ \sigma = \overline{1, \lambda - h - \mathrm{v} + 1} \\
&Z'_{\lambda+j} = Z''_{\lambda+j} + \sum_{q=1}^{\mathrm{v}-1} d_{jq} Z''_{h+q} \quad ; \ j = \overline{1, \mu - 2}
\end{aligned} \qquad (17)$$

فتأخذ معادلة السطح F_n في الجملة الجديدة الشكل:

$$R\left(y_1^2 + \sum_{i=1}^{\lambda-h-\mathrm{v}+1} \xi_{h+\mathrm{v}-1+i} Z''_{h+\mathrm{v}-1+i}\right) + S\left(y_2^2 + \sum_{j=1}^{\mu-2} \zeta_{\lambda+j} Z''_{\lambda+j}\right) +$$

$$+T\left(y_3^2 + \sum_{p=1}^{h} \chi_p Z''_p + \sum_{k=1}^{g-1} \chi_{r_1+k} Z_{r_1+k}\right) + \qquad (18)$$

$$+P\left(y_4^2+\sum_{q=1}^{\mathrm{v}-1}\psi_{r+q}Z''_{r+q}\right)=c$$

حيث ψ_q دوال خطية في المتحولات x_ω ، ويمكن تعيينها بـ:

$$\psi_q=h_0^{-1}\left(\xi_{h+q}+\sum_{\sigma=1}^{\lambda-h-\mathrm{v}-1}C_{\sigma q}\xi_{h+\mathrm{v}-1+\sigma}\right)$$

$$=h_1^{-1}\sum_{j=1}^{\mu-2}d_{jq}\zeta_j \quad ; \quad q=\overline{1,\mathrm{v}-1} \qquad (19)$$

حيث h_0 و h_1 وسيطان حقيقيان، وبالتالي:

$$P=h_0R+h_1S \qquad (20)$$

يتعلق اختيار الدوال ψ_q ، إلى حدّ ما، بالدوال χ_p . ولا تتحقق المساواتان

$$h_0=c\lambda_0 \quad , \quad h_1=c\lambda_1$$

في آن معاً، مما يفرض شروطاً إضافية على اختيار مجموعة مستويات تناظر السطح F_n ، الموافقة لمناحي المستوي Π^{v}.

إن إيجاد الدوال χ_p و ψ_q بالعلاقات (8) و (19) ، يفرض شرطاً إضافياً إلى الشرط

$$h+\mathrm{v}\le\lambda-1$$

وهو أن يكون

$$h+\mathrm{v}\le\mu-1$$

بهذا الشكل نكون قد أثبتنا صحة المبرهنة الآتية:

مبرهنة2: إذا كان $\mathrm{v} = \mathrm{v}_1$ وكانت الدوال χ_p و ψ_q معرفة بالعلاقات (8) و (19)، فإن تموضع الغلاف Π^{v} يكون عشوائياً $(\Pi^{\mathrm{v}} = F\Pi^{\mathrm{v}})$ إذا تحققت المتراجحة الهندسية

$$h + \mathrm{v} \leq \mu - 1 \leq \lambda - 1$$

حين يتعين السطح F_n بالمعادلة (18).

التوصيات:

وفقاً لهذا السياق، لابد لنا من دراسة باقي حالات تشكل مستقيمات التقاطع المضاعفة، من أجل استنتاج المتراجحات الهندسية الموافقة، وتعيين معادلات السطوح الجبرية في كل حالة على حدة، بُغية استنتاج الشروط النهائية للتموضع المتبادل لهذه الأغلفة الخطية.

المراجع العربية:

1. د.عصام ديبان – التوضع المتبادل للأغلفة الخطية لمدارات مناحي التناظر الأربعة، 1999،مجلة جامعة البعث، المجلد (21) العدد (3).

2. د.عصام ديبان – تناظر السطوح الجبرية ذات مدارات مناحي التناظر الأربعة في الفضاء الإقليدي E^m (I)، 2007،مجلة جامعة البعث، المجلد (29)العدد (9).

3. د.عصام ديبان – تناظر السطوح الجبرية ذات مدارات مناحي التناظر الأربعة في الفضاء الإقليدي E^m (II)، 2011،مجلة جامعة البعث، المجلد (33).

4. Игнатенко В.Ф.,1989- Бесконечные группы, порождённых косыми отражениями. Взаимное расположение линейных оболочек четырех орбит направлений симметрии. I // Симфероп.ун-т; Симферополь,32с.-Библ.4 назв.- Рус.- Деп. в УкрНИИНТИ 31.10.89.№ 2373 -Ук.89.

5. ИгнатенкоВ.Ф.,1980-геометрия алгебраических поверхностей с симметриями. // Проблемы геометрии / Итоги науки и техники.-М.: Наука,Т.11,с.203-240

6. ИгнатенкоВ.Ф.,1984-Некоторые вопросы геометрический теории инваринтов групп, порожденных отражениями (ортогональными и косыми)// Проблемы геометрии / Итоги науки и техники.,-М.: Наука,Т.16.- с.915-229.

7. Игнатенко В.Ф.,1989- Бесконечные группы, порождённых косыми отражениями. Взаимное расположение линейных оболочек четырех орбит направлений симметрии.II//

Симфероп. ун-т; Симферополь,34с.-Библ.5 назв.- Рус.- Деп. вУкрНИИНТИ 19.02.90.№ 224 -Ук.90.

8. Дибан Иссам, 1991- Бесконечные группы, порождённых косыми отражениями. Взаимное расположение линейных оболочек четырех орбит направлений симметрии.IV// Симфероп. ун-т; Симферополь,22с.-Библ.3 назв.- Рус.- Деп. в УкрНИИНТИ 17.02.92.№ 192 -Ук.92.

9. Дибан Иссам, 1992-Бесконечные группы, порождённых косыми отражениями. Взаимное расположение линейных оболочек четырех орбит направлений симметрии.V// Симфероп. ун-т; Симферополь, 66с.-Библ.4 назв.- Рус.- Деп. в УкрИНТЭИ 17.09.92.№224-Ук.92.

10. Дибан Иссам. Бесконечные группы, порождённых косыми отражениями. Взаимное расположение линейных оболочек четырех орбит направлений симметрии. // Междупародная научная конференция "Лобачевский и современная геометрия"; Казань, август, 1992. -С.35.

11. Дибан Иссам. Бесконечные группы, порождённых косыми отражениями. Взаимное расположение линейных оболочек четырех орбит направлений симметрии. // Динам. Системы.- 1993. Вып. 12.