التكاملات على سطح الكرة في الفضاء $\Re^n$ بطريقة النواة المولدة

د. حامد عباس [1] هبه زكريا اصلان [2]

جامعة البعث_ كلية العلوم_ قسم الرياضيات

ملخص:

تم في هذه المقالة إيجاد قيم التكاملات على سطح الكرة في الفضاء $\Re^n$ باستخدام طريقة النواة المولدة وذلك بإيجاد القانون التكاملي، الذي نعتمد عليه في عمليات التعامد والنظيم من أجل إيجاد كثيرات الحدود المتعامدة والمنظمة على سطح الكرة $S_{n-1}^{(r)}$التي نصف قطرها r، ومن ثم تشكيل النواة المولدة التي تساعد في إيجاد ثوابت العلاقة التكعيبية والتي تفيد في تشكيل قانون يستخدم لإيجاد قيمة التكاملات المضاعفة لأي دالة في المنطقة $S_{n-1}^{(r)}$.

الكلمات المفتاحية: طريقة النواة المولدة، العلاقة التكعيبية، كثيرات الحدود المتعامدة والمنظمة.

---

[1] عضو هيئة تدريسية، جامعة البعث_ كلية العلوم_ قسم الرياضيات

[2] طالبة دكتوراة، معيدة موفدة، جامعة البعث_كلية العلوم_قسم الرياضيات

The Integrals On The Sphere In The Space $\mathfrak{R}^n$ By The Generative Kernal Method

[1] Dr, Hamed Abbas [2] Hiba Zakaria Aslan

Albaath University_ Faculty Of Science_ Department f Mathematics

Abstract:

In this article, the values of the integrals in the spherical region in space $\Re^n$ were found by using The Generative Kernal Method by finding the integrative constitution that we adopt in the orthogonal and regular operations in order to find Orthonormal Polynomials on the sphere with radius r, then forming the Generative Kernal that helps in finding the constants of the Cubature Formulae and that is useful in forming a relation that helps in finding the values of the double integrals of any function in $B_n^{(r)}$

Key words: The Generative Kernal Method, Cubature Formulae, Orthonormal Polynomials.

[1] A Faculty member_ Albaath university_faculty of science_ department of mathematics

[2] Doctoral student__ Albaath university_faculty of science_ department of mathematics

1. مقدمة:

اكتشفت طريقة النواة المولدة للمرة الأولى عام 1968على يد العالم ميسوفسكيخ من أجل حساب التكاملات المضاعفة في المناطق التي تمتلك مركز تناظر والتي لا تمتلك مركز تناظر[5,6]، أمّا التطور الهام لطريقة النواة المولدة حصل عليه ميولر عام 1973 [4]، حيث تمكن من إثبات المبرهنات، وأوجد العلاقة التكعيبية بـ $2k+1$ دقة جبرية في حالة المناطق المتناظرة، و $2k$ في حالة المناطق غير المتناظرة [2,3,4]، وفي عام 1975 تمكن غيغل من إيجاد العلاقة التكعيبية من أجل الكرة الواحدية في الفضاء رباعي الأبعاد، إنَّ البحوث الجارية في هذا المجال تدور حول دراسة خواص النواة المولدة وتطبيق هذه الطريقة في مناطق تكاملية أوسع، والحصول على علاقات تكعيبية جديدة معممة يمكن استخدامها من أجل حساب القيمة التقريبية للتكاملات المضاعفة.

2. هدف البحث:

يهدف البحث إلى إيجاد القانون العام للقانون التكاملي الذي سوف نستخدمه في عمليات التعامد والنظيم في سطح الكرة $S_{n-1}^{(r)}$، وإيجاد الصيغة العامة لكثيرات الحدود المتعامدة والمنظمة المطلوبة على المنطقة التكاملية المفروضة بـ nمتغير ومن عدة درجات، واستنتاج الصيغة العامة لكل درجة، ثم تشكيل النواة المولدة واستنتاج القانون العام لها، والذي يزداد صعوبة كلما زادت درجة كثيرة الحدود.

3. مواد البحث:

3-1. بعض المبرهنات والتعاريف الهامة [5,6,13]:

قبل عرض طريقة النواة المولدة لتشكيل العلاقات التكعيبية، لابد من توضيح بعض المفاهيم الأساسية:

تعريف 1: العلاقة التكعيبية:

إن العلاقة التكعيبية هي مساواة تقريبية من الشكل:

$$\int_{\Omega} \omega(x)\, f(x)\,dx \cong \sum_{j=1}^{N} C_j\ f(x_j) \qquad (1)$$

حيث إن x_j هي نقاط مختلفة مثنى مثنى وتدعى نقاط المكاملة (النقاط التكاملية) أو عقد العلاقة التكعيبية، N عدد النقاط التكاملية و C_j الثوابت الموافقة لتلك النقاط، $f(x)$ الدالة المراد مكاملتها و $\omega(x)$ دالة الوزن زوجية، تحقق:

$$x \in \Omega \Rightarrow -x \in \Omega \quad \& \quad \omega(x) = \omega(-x) \qquad (2)$$

أما Ω فهي المنطقة التكاملية $S_{n-1}^{(r)}$

نقول عن العلاقة التكعيبية (1) إنها تمتلك دقة جبرية d، إذا تحولت إلى مساواة صحيحة، بحيث تكون درجة كثيرة الحدود المُكاملة $f(x)$ لا تتجاوز d

مبرهنة 1:

لنفرض أن $\omega(x)$ تحقق الشرط (2)، و $\Omega = S_{n-1}^{(r)}$ لا تمتلك نقاط داخلية، فإذا كانت العلاقة التكعيبية (1) تمتلك d دقة جبرية حيث $d = 2k$ و k درجة كثيرات الحدود المتعامدة والمنظمة، فإن N عدد عقد العلاقة التكعيبية تحقق المتراجحة:

$$N \ge h = M(n,\kappa) - M(n,\kappa-2) \qquad ;\kappa = \left[\frac{m}{2}\right] \qquad (3)$$

حيث $M(n,\kappa) = \dfrac{(n+\kappa)!}{n!\,\kappa!}$

مبرهنة 2:

لنفرض أن $\omega(x)$ تحقق الشرط (2)، و $\Omega = S_{n-1}^{(r)}$ لا تمتلك نقاط داخلية، بحيث $\omega(x),\Omega$ تحققان الخاصة التناظرية بالنسبة لـ $\theta = (0,0,........,0)$

فإذا كانت العلاقة التكعيبية (1) تمتلك $d = 2k+1$ دقة جبرية، حيث θ لا تعتبر عقدة من عقد العلاقة التكعيبية، فإن عدد عقد العلاقة التكعيبية تحقق المتراجحة:

$$N \geq 2M(n-1,\kappa) \tag{4}$$

تلعب كثيرات الحدود المتعامدة والمنظمة دوراً هاماً في تشكيل النواة المولدة في العلاقات التكعيبية لطريقة النواة المولدة، حيث يمكننا الحصول على كثيرات الحدود المتعامدة والنظيمة في المنطقة Ω باستخدام طريقة شميت للتعامد والنظيم، ولنرمز لكثيرات الحدود المتعامدة والنظيمة ذات n متغير بالرمز $F_i(x)$، ولنضع:

$$K_k(u,x) = \sum_{i=1}^{\chi} F_i(x)F_i(u) \tag{5}$$

حيث إن $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$ و $\chi = M(n,k) = \frac{(n+k)!}{n!k!}$ عدد وحيدات الحد التي درجتها لا تتجاوز k بـ n متغير، تدعى العلاقة (5) بالنواة المولدة .

تعريف 2: النواة المولدة:

هي كثيرة حدود ذات $2n$ متغير تستخدم في العلاقات التكعيبية ذات الدقة الجبرية الزوجية $d = 2k$ كما في (5)، أمّا النواة المولدة للعلاقات التكعيبية ذات الدقة الجبرية الفردية $d = 2k+1$، فتُعطى بالعلاقة:

$$\widetilde{K}_k(u,x) = \sum_{i=1}^{\chi'} F_i(x)F_i(u) \tag{6}$$

حيث إن إشارة الفتحة فوق إشارة المجموع تعني أن عملية الجمع توخذ بـ i التي توافق كثيرة الحدود $F_i(x)$ التي تمتلك نفس الدرجة الزوجية (الفردية) مع k، وتدعى العلاقة (6) بالنواة المولدة وهي كثيرة حدود ذات $2n$ متغير التي درجتها لا تتجاوز k والتي تمتلك نفس الدرجة الزوجية (الفردية) مع k.

لتشكيل العلاقات التكعيبية نستخدم المبرهنتين الآتيتين:

مبرهنة 3: [7] بفرض أن النقاط $u^1,u^2,....,u^{n-1}$ تنتمي إلى سطح المنطقة Ω التي لا تمتلك نقاط داخلية وتحقق الشرط $K_k(u^i,u^j)=b_i\,\delta_{ij}$ حيث $b_i=K_k(u^i,u^i)$ ويتألف $\bigcap_{i=1}^{n-1}H_i$ مع سطح المنطقة Ωمن النقاط x^s والتي عددها $s=2k^{n-1}$ ،

فإنه توجد العلاقة التكعيبية الدقيقة من أجل كثيرات الحدود التي درجتها لا تتجاوز $2k$

$$\int_{\Omega}\omega(x)\,f(x)dx\cong\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{b_i}\,f(u^i)+\sum_{j=1}^{s}C_j\;f(x^j) \qquad (7)$$

مبرهنة 4: [7] بفرض أن كلا من $\omega(x)$ و Ω تحقق خاصة التناظر المركزي و لا تمتلك نقاط داخلية، والنقاط u^i تحقق الشرط $\widetilde{K}_k(u^i,u^j)=b_i\,\delta_{ij}$ ويتألف $\bigcap_{i=1}^{n-1}H_i$ مع سطح المنطقة Ω من النقاط المختلفة مثنى مثنى x^s والتي عددها $s=2k^{n-1}$، عندئذ يمكن تشكيل العلاقة التكعيبية التي دقتها $2k+1$:

$$\int_{\Omega}\omega(x)\,f(x)dx\cong\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2b_i}\left(f(u^i)+f(-u^i)\right)+\sum_{j=1}^{s}C_j\;f(x^j) \qquad (8)$$

3-2. إيجاد القانون التكاملي:

لتكن لدينا $S_{n-1}^{(r)}$ سطح الكرة في الفضاء $\Re^n$ حيث إن:

$S_{n-1}^{(r)}=\left\{x\in\Re^n;x_1^{\,2}+x_2^{\,2}+.....+x_n^{\,2}=r^2\right\}$ ، r نصف قطر سطح الكرة، ولنوجد قيمة التكامل:

$$P_\alpha = \int_{S_n^{(r)}} x^\alpha \quad dx \tag{9}$$

حيث إن $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ ، $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$. إذا كانت إحدى القوى α_i عدداً فردياً فإن $P_\alpha = 0$ ، أمّا إذا كانت القوى α_i أعداد زوجية، فإننا نستطيع كتابتها بالشكل $\alpha_i = 2q_i$ حيث إن $i = 1,2,...,n$ ، فنجد:

$$P_\alpha = 2r^{|\alpha|+n} \frac{\prod_{i=1}^{n} \Gamma\left(\frac{\alpha_i + 1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{|\alpha| + n}{2}\right)} \qquad ;|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n \tag{10}$$

تم إيجاد قيمة التكامل (9) في الفضاء $\Re^n$ تدريجياً من أجل $n = 1, 2, 3, 4$ ، ثم نعمم الناتج لنحصل على (10).

3-3: إيجاد كثيرات الحدود المتعامدة والمنظمة:

لإيجاد كثيرات الحدود المتعامدة والمنظمة، سوف نعتمد على مبدأ غرام شميث في التعامد والنظيم، لتكن $\mu\left(S_{n-1}^{(r)}\right) = \dfrac{2r^n \left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$ ، $\gamma = (n+2)(n+4)(n+6)$ ،

فإن:

$$F_0^0 = \frac{1}{\sqrt{\mu\left(S_{n-1}^{(r)}\right)}} \tag{11}$$

$$F_i^1 = \frac{\sqrt{n}}{r} \frac{1}{\sqrt{\mu\left(S_{n-1}^{(r)}\right)}} x_i \quad ;i = 1,2,3,....., n \tag{12}$$

(13)

$$F_{ij}^2=\begin{cases} F_{ii}^2=\sqrt{\dfrac{(n+1-i)n(n+2)}{2r^4(n-i)\mu\left(S_{n-1}^{(r)}\right)}}\left[x_i^2+\dfrac{1}{n+1-i}\left(\sum_{j=1}^{i-1}x_j^2-r^2\right)\right] & ;i=j \\ F_{ij}^2=\sqrt{\dfrac{n(n+2)}{r^4\mu\left(S_{n-1}^{(r)}\right)}}\,x_ix_j & ;i\neq j \end{cases}$$

(14)

$$F_{ijk}^3=\begin{cases} F_{iij}^3=\sqrt{\dfrac{(n+3-i)\gamma}{2(n+2-i)r^6\mu\left(S_{n-1}^{(r)}\right)}}\left[x_i^2+\dfrac{1}{n+3-i}\left(\sum_{s=1}^{i-1}x_s^2-r^2\right)\right]x_j & ;i<j \\ F_{iii}^3=\sqrt{\dfrac{(n+3-i)\gamma}{6r^6(n-i)\mu\left(S_{n-1}^{(r)}\right)}}\left[x_i^2+\dfrac{3}{n+3-i}\left(\sum_{s=1}^{i-1}x_s^2-r^2\right)\right]x_i & ;i=j=k \\ F_{ijk}^3=\sqrt{\dfrac{\gamma}{r^6\mu\left(S_{n-1}^{(r)}\right)}}\,x_ix_jx_k & ;i\neq j\neq k \\ F_{iij}^3=\sqrt{\dfrac{(n+1-i)\gamma}{2(n-i)r^6\mu\left(S_{n-1}^{(r)}\right)}}\left[x_i^2+\dfrac{1}{n+1-i}\left(\sum_{t=1}^{i-1}x_t^2-r^2\right)\right]x_j & ;i>j \end{cases}$$

3-4: إيجاد صيغة النواة المولدة [9,10]:

3-4-1. النواة المولدة لكثيرات الحدود من الدرجة الأولى:

نعوض (12) في (6)، فنجد:

$$\widetilde{K}_1(u,x)=\sum_{i=1}^{n}F_i^1(u)F_i^1(x)=\frac{n}{r^2}\frac{1}{\mu\left(S_{n-1}^{(r)}\right)}\sum_{i=1}^{n}u_ix_i \qquad (15)$$

وبالتعويض في (7)، حيث إن $\widetilde{K}_0(u,x)=\dfrac{1}{\mu\left(S_{n-1}^{(r)}\right)}$ ، نجد:

$$K_1(u,x)=\widetilde{K}_1(u,x)+\widetilde{K}_0(u,x)=\frac{1}{\mu\left(S_{n-1}^{(r)}\right)}+\frac{n}{r^2\,\mu\left(S_{n-1}^{(r)}\right)}\sum_{i=1}^{n}u_ix_i \qquad (16)$$

3-4-2. النواة المولدة لكثيرات الحدود من الدرجة الثانية:

تعطى النواة المولدة بالصيغة:

$$\widetilde{K}_2 = \frac{1}{\mu\left(S_{n-1}^{(r)}\right)} + \sum_{j=1}^{n} F_j^2(x) F_j^2(u) + \sum_{i\neq j} F_i^2(x) F_j^2(u) \qquad (17)$$

بتعويض كثيرات الحدود من الدرجة الثانية ومن الدرجة الصفرية، نجد:

$$\widetilde{K}_2(u,x) = \frac{1}{\mu\left(S_{n-1}^{(r)}\right)} + N\sum_{j=1}^{n-1} \frac{n+1-j}{n-j}\left[U_j\right]\left[X_j\right] + \sum_{i\neq j} F_i^2(x) F_j^2(u) \quad (18)$$

حيث إن: $$N = \frac{n(n+2)}{2r^4 \mu\left(S_{n-1}^{(r)}\right)}$$

$$X_j = x_j^2 + \frac{1}{n+1-j}\left(\sum_{s=1}^{j-1} x_s^2 - r^2\right) \quad U_j = u_j^2 + \frac{1}{n+1-j}\left(\sum_{s=1}^{j-1} u_s^2 - r^2\right) \qquad (19)$$

يمكن كتابة (18) بالشكل:

$$\begin{aligned}
\widetilde{K}_2(u,x) &= \frac{1}{\mu\left(S_{n-1}^{(r)}\right)} + N\sum_{j=1}^{n-1} \frac{n+1-j}{n-j}\left[U_j\right]\left[x_j^2 + \frac{1}{n+1-j}\sum_{s=1}^{j-1} x_s^2 - \frac{r^2}{n+1-j}\right] \\
&\quad + \sum_{i\neq j} F_i^2(x) F_j^2(u) \\
&= \frac{1}{\mu\left(S_{n-1}^{(r)}\right)} + N\sum_{j=1}^{n-1} \frac{n+1-j}{n-j}\left[U_j\right] x_j^2 + N\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\left[U_j\right]}{n-j}\sum_{s=1}^{j-1} x_s^2 \\
&\quad - N\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\left[U_j\right]}{n-j} r^2 + \sum_{i\neq j} F_i^2(x) F_j^2(u)
\end{aligned}$$

$$\widetilde{K}_2(u,x) = \frac{1}{\mu\left(S_{n-1}^{(r)}\right)} + N\left[S_1 + S_2 + S_3\right] + \frac{n(n+2)}{r^4 \mu\left(S_{n-1}^{(r)}\right)} \sum_{i\neq j} x_i x_j u_i u_j \qquad (20)$$

لنوجد كلاً من $S_1,\ S_2,\ S_3$:

نخرج في S_1 المجموع ذو الدليل n-1، ثم نبدل كل j بـ s فنجد:

$$S_1 = 2U_{n-1}x_{n-1}^2 + \sum_{s=1}^{n-2} \frac{n+1-s}{n-s}[U_s]x_s^2 \qquad (21)$$

نجري في S_2 تبديل في عملية الجمع، فنجد:

$$S_2 = \sum_{s=1}^{n-2} x_s^2 \sum_{j=s+1}^{n-1} \frac{U_j}{n-j} \qquad (22)$$

بجمع (21) و (22)، نجد:

$$S_1 + S_2 = 2U_{n-1}x_{n-1}^2 + \sum_{s=1}^{n-2} x_s^2 .S_4 \qquad (23)$$

حيث إن:

$$S_4 = U_s + \sum_{j=s}^{n-1} \frac{U_j}{n-j} \qquad (24)$$

بتعويض (19) في (24)، نجد:

$$S_4 = u_s^2 + \frac{1}{n+1-s}\left(\sum_{t=1}^{s-1} u_t^2 - r^2\right) + \sum_{j=s}^{n} \frac{1}{n-j}\left[u_j^2 + \frac{1}{n+1-j}\left(\sum_{t=1}^{j-1} u_t^2 - r^2\right)\right]$$

وبالتالي:

$$S_4 = u_s^2 + \frac{1}{n+1-s}\sum_{t=1}^{s-1} u_t^2 - \frac{r^2}{n+1-s} + \sum_{j=s}^{n-1}\frac{1}{n-j}u_j^2 + \sum_{j=s}^{n-1}\frac{1}{(n-j)(n+1-j)}\sum_{t=1}^{j-1}u_t^2 - \sum_{j=s}^{n-1}\frac{r^2}{(n-j)(n+1-j)} \qquad (25)$$

نجري تبديلاً في ترتيب المجموع في الحد الخامس والذي سنرمز له بالرمز S_5 في (25) فنجد:

$$S_5 = \sum_{t=1}^{s-1} u_t^2 \sum_{j=s}^{n-1}\frac{1}{(n-j)(n+1-j)} + \sum_{t=s}^{n-2} u_t^2 \sum_{j=t+1}^{n-1}\frac{1}{(n-j)(n+1-j)} \qquad (26)$$

أما المجموع في (26) فيمكن كتابته بالصيغة:

$$\sum_{j=s}^{n-1}\frac{1}{(n-j)(n+1-j)} = 1 - \frac{1}{n+1-s}$$
$$\sum_{j=t+1}^{n-1}\frac{1}{(n-j)(n+1-j)} = 1 - \frac{1}{n-t} \qquad (27)$$

بتعويض (27) في (26)، نجد:

$$S_5 = \sum_{t=1}^{s-1} u_t^2 \left(1 - \frac{1}{n+1-s}\right) + \sum_{t=s}^{n-2} u_t^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n-t}\right) \qquad (28)$$

بتعويض (28) في (25)، نجد:

(29)

$$S_4 = u_s^2 + \frac{1}{n+1-s}\sum_{t=1}^{s-1} u_t^2 - \frac{r^2}{n+1-s} + \sum_{j=s}^{n-1}\frac{1}{n-j}u_j^2 + \sum_{t=1}^{s-1} u_t^2 - \frac{1}{n+1-s}\sum_{t=1}^{s-1} u_t^2 + \sum_{t=s}^{n-2} u_t^2 - \sum_{t=s}^{n-2}\frac{1}{n-t}u_t^2 - r^2 + \frac{r^2}{n+1-s}$$

بتجميع الحدود، نجد:

$$S_4 = u_s^2 + \sum_{t=1}^{n-1} u_t^2 - r^2 \qquad (31)$$

بتعويض (31) في (23)، نجد:

$$S_1 + S_2 = \sum_{s=1}^{n-1} x_s^2 \left(u_s^2 + \sum_{s=1}^{n-1} u_s^2 - r^2 \right) \qquad (32)$$

لنوجد S_3:

$$-S_3 = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{[U_j]}{n-j} r^2 = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{r^2}{n-j} \left(u_j^2 + \frac{1}{n+1-j} \left(\sum_{s=1}^{j-1} u_s^2 - r^2 \right) \right)$$
$$= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{r^2}{n-j} u_j^2 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{r^2}{(n-j)(n+1-j)} \sum_{s=1}^{j-1} u_s^2 - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{r^4}{(n-j)(n+1-j)}$$

وبالتالي:

$$-S_3 = r^2 \sum_{s=1}^{n-1} u_s^2 - r^4 \left(\frac{n-1}{n} \right) \qquad (33)$$

بجمع (32) و (33)، نجد:

$$S_1 + S_2 + S_3 = \sum_{s=1}^{n-1} x_s^2 \left(u_s^2 + \sum_{t=1}^{n-1} u_t^2 - r^2 \right) - r^2 \sum_{s=1}^{n-1} \left(u_s^2 + x_s^2 \right) + r^4 \left(\frac{n-1}{n} \right)$$

بالتعويض في (20)، نجد:

$$\tilde{K}_2(u,x)=\frac{1}{\mu\left(S_{n-1}^{(r)}\right)}+N\left[S_1+S_2+S_3\right]+\frac{n(n+2)}{r^4\mu\left(S_{n-1}^{(r)}\right)}\sum_{i\neq j}x_ix_ju_iu_j$$

$$=\frac{1}{\mu\left(S_{n-1}^{(r)}\right)}+\frac{n(n+2)}{2r^4\mu\left(S_n^{(r)}\right)}\left[\begin{array}{l}\sum_{s=1}^{n-1}x_s^2u_s^2+\sum_{s=1}^{n-1}x_s^2\sum_{s=1}^{n-1}u_s^2\\-r^2\left(\sum_{s=1}^{n-1}u_s^2+\sum_{s=1}^{n-1}x_s^2\right)+r^4\left(\frac{n-1}{n}\right)\end{array}\right]$$

$$+\frac{n(n+2)}{r^4\mu\left(S_{n-1}^{(r)}\right)}\sum_{i\neq j}x_ix_ju_iu_j$$

يمكن كتابة العلاقة الأخيرة بالشكل:

(34)

$$\tilde{K}_2(u,x)=\frac{n}{r^4\mu\left(S_{n-1}^{(r)}\right)}\left\{\begin{array}{l}r^4\,\frac{n+1}{2}+(n+2)\sum_{i\neq j}x_ix_ju_iu_j+\\\frac{(n+2)}{2}\left[\sum_{s=1}^{n-1}x_s^2u_s^2+\sum_{s=1}^{n-1}x_s^2\sum_{s=1}^{n-1}u_s^2-r^2\left(\sum_{s=1}^{n-1}u_s^2+\sum_{s=1}^{n-1}x_s^2\right)\right]\end{array}\right\}$$

ولإيجاد $K_2(u,x)$:

(35)

$$K_2(u,x)=\tilde{K}_2(u,x)+\tilde{K}_1(u,x)$$

$$=\frac{n}{r^4\mu\left(S_{n-1}^{(r)}\right)}\left\{\begin{array}{l}r^4\,\frac{n+1}{2}+(n+2)\sum_{i\neq j}x_ix_ju_iu_j+r^2\sum_{j=1}^{n}u_jx_j\\\frac{(n+2)}{2}\left[\sum_{s=1}^{n-1}x_s^2u_s^2+\sum_{s=1}^{n-1}x_s^2\sum_{s=1}^{n-1}u_s^2-r^2\left(\sum_{s=1}^{n-1}u_s^2+\sum_{s=1}^{n-1}x_s^2\right)\right]\end{array}\right\}$$

لنفرض أنّ $(u_1,u_2,.....,u_n)\in S_{n-1}^{(r)}$ وبالتالي فإنّ $\sum_{s=1}^{n}u_s^2=r^2$، نعوض في (34) و (35)، فنجد الصيغة النهائية لـ $\widetilde{K}_2(u,x)$ هي:

$$\widetilde{K}_2(u,x)=\frac{n(n+2)}{2r^4\mu\left(S_{n-1}^{(r)}\right)}\left(\sum_{s=1}^{n}x_su_s+\frac{r^2}{\sqrt{n+2}}\right)\left(\sum_{s=1}^{n}x_su_s-\frac{r^2}{\sqrt{n+2}}\right)\qquad(36)$$

وبالتالي فإن الصيغة النهائية لـ $K_2(u,x)$ هي:

$$K_2(u,x)=\frac{n}{r^4\mu\left(S_{n-1}^{(r)}\right)}\left\{\frac{n+2}{2}\left(\sum_{s=1}^{n}x_su_s\right)^2+r^2\sum_{s=1}^{n}x_su_s-\frac{r^4}{2}\right\}\qquad(37)$$

3-4-3. النواة المولدة لكثيرات الحدود من الدرجة الثالثة:

باتباع نفس الخطوات في الفقرة 3-4-2، نجد إن:

$$\widetilde{K}_3(u,x)=\frac{n(n+2)(n+4)}{6r^6\mu\left(S_{n-1}^{(r)}\right)}\left[\left(\sum_{i=1}^{n}u_ix_i\right)^3-\frac{3r^4}{n+4}\sum_{i=1}^{n}u_ix_i\right]\qquad(38)$$

$$K_3(u,x)=\frac{n(n+2)(n+4)}{6r^6\mu\left(S_{n-1}^{(r)}\right)}\left[\begin{array}{l}\left(\sum_{i=1}^{n}u_ix_i\right)^3+\frac{3r^2}{n+4}\left(\sum_{i=1}^{n}u_ix_i\right)^2\\-\frac{3r^4}{n+4}\sum_{i=1}^{n}u_ix_i-\frac{3r^6}{(n+2)(n+4)}\end{array}\right]\qquad(39)$$

4. النتائج ومناقشتها [1,8,11,12]:

4-1. تشكيل العلاقة التكعيبية للنواة المولدة $K_1(u,x)$ و $\widetilde{K}_1(u,x)$:

4-1-1. تشكيل العلاقة التكعيبية للنواة المولدة $\widetilde{K}_1(u,x)$:

لنوجد العلاقات التكعيبية من أجل الدقة الجبرية $d=2k+1=3$ نختار النقطة $u^1=(r,0,0,.....,0)$ و نعوض في (15) فنحصل على المستوي:

$$H_1 := \frac{n}{r^2}\frac{1}{\mu\left(S_{n-1}^{(r)}\right)} r x_1 = 0$$

نختار من $H_1 \cap S_{n-1}^{(r)}$ نقطة u^2، من معادلة المستوي السابقة لدينا $x_1=0$ نعوض في المساواة $x_1^2+x_2^2=r^2$ فنجد أن $x_2=r$ أي أن $u^2=(0,r,0,.....,0)$ والتي بدورها تعين المستوي H_2

$$H_2 := \frac{n}{r^2}\frac{1}{\mu\left(S_{n-1}^{(r)}\right)} r\, x_2 = 0$$

نختار من $S_{n-1}^{(r)} \cap (H_1 \cap H_2)$ نقطة u^3، من معادلة المستوي الأول والثاني $x_1=x_2=0$ بالتعويض في المساواة $x_1^2+x_2^2+x_3^2=r^2$ نجد أن $u^3=(0,0,r,0,.....,0)$ وهكذا........ فنجد أن $S_{n-1}^{(r)} \cap (H_1 \cap H_2 \cap ... \cap H_{n-1})$ هو النقطة $x=(0,0,0,.....,\pm r)$، عدد النقاط التكاملية يساوي $2n$ والحد الأدنى لعدد هذه النقاط هو $N \geq 2M(n-1,k)=2M(n-1,1)=2n$، نعوض في العلاقة التكعيبية (8) حيث

$$\frac{1}{2b_i}=\left[2\widetilde{K}_1(u^i,u^i)\right]^{-1}=\left[2\frac{n}{r^2\mu\left(S_{n-1}^{(r)}\right)}r^2\right]^{-1}=\frac{\mu\left(S_{n-1}^{(r)}\right)}{2n}$$

من أجل الدالة $f(x)=1$ ، نجد أن: $C=\dfrac{\mu\left(S_{n-1}^{(r)}\right)}{2n}$

3-4-1-2. العلاقة التكعيبية للنواة المولدة $K_1(u,x)$:

لنوجد العلاقة التكعيبية من أجل $d = 2k = 2$ ، نختار النقطة $u^1 = (r,0,0,.....,0)$ نعوض في (16) فنحصل على المستوي:

$$H_1 := 1 + \frac{n}{r} x_1 = 0$$

وباتباع الخطوات نفسها في الفقرة الأخيرة، نجد $u^2 = \left(-\frac{r}{n}, \frac{r}{n} \sqrt{(n+1)(n-1)}, 0, ..., 0 \right)$ والتي بدورها تعين المستوي

$$H_2 := 1 - \frac{1}{r} x_1 + \frac{1}{r} \sqrt{(n+1)(n-1)}\, x_2 = 0$$

وبإيجاد $u^3 = \left(\frac{-r}{n}, \frac{-r}{n} \sqrt{\frac{n+1}{n-1}}, r\sqrt{\frac{(n-2)(n+1)}{n(n-1)}}, 0, 0, ..., 0 \right)$ والتي تعين المستوي

$$H_3 := 1 - \frac{1}{r} x_1 - \frac{1}{r} \sqrt{\frac{(n+1)}{(n-1)}}\, x_2 + \frac{1}{r} \sqrt{\frac{n(n-2)(n+1)}{n-1}}\; x_3 = 0$$

وبالتالي بشكل عام، نختار من $S_{n-1}^{(r)} \cap (H_1 \cap H_2 \cap H_3 \cap ..... \cap H_i)$ النقطة u^i والتي تعطى بالشكل:

$$u^i = \begin{pmatrix} \frac{-r}{n}, \frac{-r}{n} \sqrt{\frac{n+1}{n-1}}, -r\sqrt{\frac{(n+1)}{n(n-1)(n-2)}}, ..., \\ -r\sqrt{\frac{(n+1)}{n(n+3-(i-1))(n+2-(i-1))}}\;, r\sqrt{\frac{(n+1)(n-i+1)}{n(n+2-i)}}, 0......., 0 \end{pmatrix}$$

وبالتالي فإن $S_{n-1}^{(r)} \cap (H_1 \cap H_2 \cap H_3 \cap ..... \cap H_{n-1})$ يتألف من نقطتين هما:

$$x^{1,2}=\left(\frac{-r}{n},\frac{-r}{n}\sqrt{\frac{n+1}{n-1}},-r\sqrt{\frac{(n+1)}{n(n-1)(n-2)}},.........,-r\sqrt{\frac{(n+1)}{12n}}\ ,\pm r\sqrt{\frac{(n+1)}{2n}}\right)$$

عدد النقاط التكاملية يساوي $n+1$ والحد الأدنى لعدد هذه النقاط هو $N\geq n+1$، نعوض في العلاقة التكعيبية (7)، حيث $\frac{1}{b_i}=\left[K_1\left(u^i,u^i\right)\right]^{-1}=\frac{\mu\left(S_{n-1}^{(r)}\right)}{n+1}$ ، ولنحسب قيمة الثابت C من أجل الدالة $f(x)=1$:

$$C\,f(x)=\int_{S_{n-1}^{(r)}}1\,dx-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{b_i}\left[f\left(u^i\right)\right]=\mu\left(S_{n-1}^{(r)}\right)\frac{n}{n+1}\Rightarrow C=\mu\left(S_{n-1}^{(r)}\right)\frac{n}{n+1}$$

4-2. تشكيل العلاقة التكعيبية للنواة المولدة $K_2(u,x)$ و $\tilde{K}_2(u,x)$:

4-2-1. تشكيل العلاقات التكعيبية من أجل $\tilde{K}_2(u,x)$:

- لنشكل العلاقة التكعيبية من أجل النواة المولدة في (36)، ومن أجل الدقة الجبرية $d=2k+1=5$ ومن أجل $n=2,$ ، نعوض في (36)، فنجد:

$$\tilde{K}_2(u,x)=\frac{4}{r^4\mu\left(S_2^{(r)}\right)}\left(x_1u_1+x_2u_2+\frac{r^2}{2}\right)\left(x_1u_1+x_2u_2-\frac{r^2}{2}\right)$$

لنأخذ النقطة $u^1=(r,0)$، نعوض في العلاقة الأخيرة، فنحصل على معادلة السطح:

$$H_1:\left(rx_1+\frac{r^2}{2}\right)\left(rx_1-\frac{r^2}{2}\right)=0$$

يتكون التقاطع $H_1\cap S_1^{(r)}$ من $s=2k^{n-1}=2(2)=4$ أربع نقاط، هي:

$$x^1=\left(\frac{r}{2},\frac{\sqrt{3}r}{2}\right)\ ,\ x^2=\left(\frac{r}{2},\frac{-\sqrt{3}r}{2}\right)$$
$$x^3=\left(\frac{-r}{2},\frac{\sqrt{3}r}{2}\right)\ ,\ x^4=\left(\frac{-r}{2},\frac{-\sqrt{3}r}{2}\right)$$

عدد النقاط التكاملية يساوي 6 والحد الأدنى لعدد هذه النقاط $N\geq 2M(n-1,k)=2M\left(1,\left[\frac{d}{2}\right]\right)=6$ ، تقع النقاط جميعها على سطح الدائرة $x^2+y^2=r^2$ فلها الثابت نفسه، نعوض في العلاقة التكعيبية (8)حيث:

$$\frac{1}{2b_i}=\left[2K_k\left(u^i,u^i\right)\right]^{-1}=\left[\frac{8}{r^4\mu\left(S_1^{(r)}\right)}\left(r^2+\frac{r^2}{2}\right)\left(r^2-\frac{r^2}{2}\right)\right]^{-1}=\frac{r^2\pi}{3}$$

لايجاد الثوابت C_1,C_2,C_3,C_4 نختار الدوال الآتية:

$$f_1=\left(x+\frac{r}{2}\right)\left(y+\frac{\sqrt{3}r}{2}\right)\qquad f_2=\left(x+\frac{r}{2}\right)\left(y-\frac{\sqrt{3}r}{2}\right)$$
$$f_3=\left(x-\frac{r}{2}\right)\left(y+\frac{\sqrt{3}r}{2}\right)\qquad f_4=\left(x-\frac{r}{2}\right)\left(y-\frac{\sqrt{3}r}{2}\right)$$

نحصل على الثابت C_1 بتعويض الدالة f_1 في العلاقة التكعيبية حيث إن الدالة f_1 تنعدم في النقاط x^i ماعدا العقدة x^1 ، ونوجد بقية الثوابت من أجل بقية الدوال على التتالي، فنحصل على ثوابت العلاقة التكعيبية كما في الجدول الآتي:

x^i	C_i
x^1,x^2,x^3,x^4	$\frac{\pi r^2}{3}$

الجدول (1): ثوابت العلاقة التكعيبية (8) من أجل $\tilde{K}_2(u,x)$ و $n=2$.

●● لنشكل العلاقة التكعيبية من أجل النواة المولدة في (36)، ومن أجل الدقة الجبرية $d=2k+1=5$ ومن أجل $n=3,$ ، نعوض في (36)، فنجد:

$$\widetilde{K}_2(u,x)=\frac{15}{2r^4\mu\left(S_n^{(r)}\right)}\left(x_1u_1+x_2u_2+x_3u_3+\frac{r^2}{\sqrt{5}}\right)\left(x_1u_1+x_2u_2+x_3u_3-\frac{r^2}{\sqrt{5}}\right)$$

باتباع نفس الخطوات في الفقرة الأخيرة، نجد أن $u^1=(r,0,0)$ ومعادلة سطحها هي

$H_1:\left(rx_1+\frac{r^2}{\sqrt{5}}\right)\left(rx_1-\frac{r^2}{\sqrt{5}}\right)=0$ ، و $u^2=\left(\frac{r}{\sqrt{5}},\sqrt{\frac{4}{5}}\,r,0\right)$ والتي تعيين السطح

$H_2:\left(\frac{r}{\sqrt{5}}x_1+\sqrt{\frac{4}{5}}\,r\,x_2+\frac{r^2}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{r}{\sqrt{5}}x_1+\sqrt{\frac{4}{5}}\,r\,x_2-\frac{r^2}{\sqrt{5}}\right)=0$ ، عدد نقاط التقاطع

$S_2^{(r)}\bigcap\left(H_1\bigcap H_2\right)$ هو $s=2k^{n-1}=2(2)^2=8$ هو النقاط الآتية:

$$x^1=\left(\frac{1}{\sqrt{5}}r\,,\frac{-1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}r\,,\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\,r\right)\ ,x^2=\left(\frac{1}{\sqrt{5}}r\,,\frac{-1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}r\,,-\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\,r\right)$$

$$x^3=\left(\frac{1}{\sqrt{5}}r\,,\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}r\,,\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\,r\right)\ ,x^4=\left(\frac{1}{\sqrt{5}}r\,,\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}r\,,-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\,r\right)$$

$$x^5=\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}r\,,\frac{-1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}r\,,\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\,r\right)\ x^6=\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}r\,,\frac{-1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}r\,,-\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\,r\right)$$

$$x^7=\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}r\,,\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}r\,,\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\,r\right)\ x^8=\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}r\,,\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}r\,,-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\,r\right)$$

عدد النقاط التكاملية هو 12 والحد الأدنى لعدد النقاط هو $N\geq 2M(n-1,k)=2M\left(2,\left[\frac{d}{2}\right]\right)=12$ وبالتالي تقع النقاط جميعها على سطح

الكرة $x^2+y^2+z^2=r^2$ فلها الثابت نفسه، حيث إن:

$$\frac{r^3\pi}{3}=\left[\frac{15}{r^4\mu\left(S_3^{(r)}\right)}\left(r^2+\frac{r^2}{\sqrt{5}}\right)\left(r^2-\frac{r^2}{\sqrt{5}}\right)\right]^{-1}=\frac{1}{2b_i}$$

، و لإيجاد الثابت C_1 نختار الدالة $f_1=\left(x+\frac{r}{\sqrt{5}}\right)\left(y+\frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}r\right)\left(z+\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}r\right)$ التي تنعدم في النقاط x^i ماعدا العقدة x^1، ونوجد بقية الثوابت بنفس الأسلوب، فنحصل على ثوابت العلاقة التكعيبية كما في الجدول الآتي:

C_i	x^i
$\frac{2-\sqrt{5}}{3}r^3\pi$	x^1,x^2
$\frac{\sqrt{5}}{3}r^3\pi$	x^3,x^4
$\frac{-\sqrt{5}}{3}r^3\pi$	x^5,x^6
$\frac{2+\sqrt{5}}{3}r^3\pi$	x^7,x^8

الجدول (2): ثوابت العلاقة التكعيبية (8) من أجل $\tilde{K}_2(u,x)$ و $n=3$.

4-2-2. تشكيل العلاقات التكعيبية من أجل $K_2(u,x)$:

- لنشكل العلاقة التكعيبية من أجل النواة المولدة في (37)، ومن أجل الدقة الجبرية $d=2k=4$ ومن أجل $n=2,$ ، نعوض في (37)، فنجد:

$$K_2(u,x)=\frac{2}{r^4\mu\left(S_2^{(r)}\right)}\left(x_1u_1+x_2u_2+\frac{\sqrt{5}-1}{4}r^2\right)\left(x_1u_1+x_2u_2+\frac{-\sqrt{5}-1}{4}r^2\right)$$

لنأخذ النقطة $u^1=(r,0)$ التي تعين

$$H_1:\left(rx_1+\frac{\sqrt{5}-1}{4}r^2\right)\left(rx_1-\frac{\sqrt{5}+1}{4}r^2\right)=0$$

عدد نقاط التقاطع $H_1\cap S_1^{(r)}$ هو $s=2k^{n-1}=4$ ، وهي:

$$x^1=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}r\ ,\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}r\right)\ ,\ x^2=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}r\ ,-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}r\right)$$
$$x^3=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}r\ ,\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}r\right)\ ,\ x^4=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}r\ ,-\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}r\right)$$

عدد النقاط التكاملية يساوي 5 والحد الأدنى لعدد هذه النقاط هو $N\geq M(n,k)-M(n,k-2)=5$ ، تقع النقاط جميعها على سطح الدائرة $x^2+y^2=r^2$ ، نعوض في العلاقة التكعيبية الآتية، حيث $\frac{1}{b_i}=\left[K_k\left(u^i,u^i\right)\right]^{-1}=\left[\frac{2}{r^4\mu\left(S_1^{(r)}\right)}\frac{r^4}{4}\right]^{-1}=4r^2\pi$ ، ولايجاد الثابت C_1 نختار الدالة الآتية:

$f_1=\left(x+\frac{-1-\sqrt{5}}{4}r\right)\left(y+\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}r\right)$ فنحصل على الثابت C_1 حيث إن الدالة f_1 تنعدم في النقاط x^i ماعدا العقدة x_1 ، ونوجد بقية الثوابت من أجل بقية الدوال على التتالي، فنحصل على ثوابت العلاقة التكعيبية كما في الجدول الآتي:

x^i	C_i
x^1,x^2	$\frac{7\sqrt{5}-5}{10}\pi r^2$
x^3,x^4	$\frac{-7\sqrt{5}-5}{10}\pi r^2$

الجدول (3): ثوابت العلاقة التكعيبية (7) من أجل $K_2(u,x)$ و $n=2$.

•• لنشكل العلاقة التكعيبية من أجل النواة المولدة في (37)، ومن أجل الدقة الجبرية $d = 2k = 4$ ومن أجل $n = 3$، نعوض في (37)، فنجد:

$$K_2(u,x) = \frac{15}{2r^4 \mu\left(S_2^{(r)}\right)}\left(\sum_{i=1}^{3} x_i u_i + \frac{\sqrt{6}+1}{5}r^2\right)\left(\sum_{i=1}^{3} x_i u_i + \frac{-\sqrt{6}+1}{5}r^2\right)$$

لنأخذ النقطة $u^1 = (r,0,0)$ التي تعين السطح

$$H_1 : \left(rx_1 + \frac{\sqrt{6}+1}{5}r^2\right)\left(rx_1 + \frac{-\sqrt{6}+1}{5}r^2\right) = 0$$

وبالتالي فإن $u^2 = \left(\frac{\sqrt{6}-1}{5}r, \frac{\sqrt{18+2\sqrt{6}}}{5}r, 0\right)$ والتي تعين السطح:

$$H_2 : \left(\frac{\sqrt{6}-1}{5}r\,x_1 + \frac{\sqrt{18+2\sqrt{6}}}{5}rx_2 + \frac{\sqrt{6}+1}{5}r^2\right)$$
$$\left(\frac{\sqrt{6}-1}{5}r\,x_1 + \frac{\sqrt{18+2\sqrt{6}}}{5}rx_2 + \frac{-\sqrt{6}+1}{5}r^2\right) = 0$$

عدد نــقاط التقاطع $S_2^{(r)} \cap (H_1 \cap H_2)$ هو $s = 2k^{n-1} = 8$، ونــــقاط التقاطـــــع:

$$x^1=\left(\frac{-1+\sqrt{6}}{5}r,\frac{-12+7\sqrt{6}}{5\sqrt{18+2\sqrt{6}}}r,\sqrt{\frac{-9+24\sqrt{6}}{5\left(9+\sqrt{6}\right)}}r\right)$$

$$x^2=\left(\frac{-1+\sqrt{6}}{5}r,\frac{-12+7\sqrt{6}}{5\sqrt{18+2\sqrt{6}}}r,-\sqrt{\frac{-9+24\sqrt{6}}{5\left(9+\sqrt{6}\right)}}r\right)$$

$$x^3=\left(\frac{-1+\sqrt{6}}{5}r,\frac{-12-3\sqrt{6}}{5\sqrt{18+2\sqrt{6}}}r,\sqrt{\frac{3}{9+\sqrt{6}}}r\right)$$

$$x^4=\left(\frac{-1+\sqrt{6}}{5}r,\frac{-12-3\sqrt{6}}{5\sqrt{18+2\sqrt{6}}}r,-\sqrt{\frac{3}{9+\sqrt{6}}}r\right)$$

$$x^5=\left(-\frac{1+\sqrt{6}}{5}r,\sqrt{\frac{3}{9+\sqrt{6}}}r,\sqrt{\frac{3}{9+\sqrt{6}}}r\right)$$

$$x^6=\left(-\frac{1+\sqrt{6}}{5}r,-\sqrt{\frac{3}{9+\sqrt{6}}}r,\sqrt{\frac{3}{9+\sqrt{6}}}r\right)$$

$$x^7=\left(-\frac{1+\sqrt{6}}{5}r,\sqrt{\frac{3}{9+\sqrt{6}}}r,-\sqrt{\frac{3}{9+\sqrt{6}}}r\right)$$

$$x^8=\left(-\frac{1+\sqrt{6}}{5}r,-\sqrt{\frac{3}{9+\sqrt{6}}}r,-\sqrt{\frac{3}{9+\sqrt{6}}}r\right)$$

عدد النقاط التكاملية يساوي 10 والحد الأدنى لعدد هذه النقاط هو $N\geq M(n,k)-M(n,k-2)=10$ ، و حيث $\frac{1}{b_i}=\left[K_k\left(u^i,u^i\right)\right]^{-1}=\frac{4r^3\pi}{9}$ ،

لإيجاد الثابت C_1 نختار الدالة

$$f_1 = \left(x + \frac{1+\sqrt{6}}{5}r\right)\left(y + \frac{12+3\sqrt{6}}{5\sqrt{18+2\sqrt{6}}}r\right)\left(z + \sqrt{\frac{-9+24\sqrt{6}}{5\left(9+\sqrt{6}\right)}}r\right)$$

، وبنفس الأسلوب نختار بقية الدوال، فنحصل على ثوابت العلاقة التكعيبية كما في الجدول الآتي:

x^i	C_i
x^1, x^2	$\frac{8+3\sqrt{6}}{36}\pi r^3$
$x^3, x^4, \ldots\ldots, x^8$	$\frac{16-\sqrt{6}}{36}\pi r^3$

الجدول (4): ثوابت العلاقة التكعيبية (7) من أجل $K_2(u,x)$ و $n=3$.

4-3. تشكيل العلاقة التكعيبية للنواة المولدة $\tilde{K}_3(u,x)$:

- لنشكل العلاقة التكعيبية من أجل النواة المولدة في (38)، ومن أجل الدقة الجبرية $d = 2k+1 = 7$ ومن أجل $n=2,$ ، نعوض في (38)، فنجد:

$$\tilde{K}_3(u,x) = \frac{8}{r^6 \mu\left(S_1^{(r)}\right)}\left(x_1u_1 + x_2u\right)\left(x_1u_1 + x_2u_2 + \frac{r^2}{\sqrt{2}}\right)\left(x_1u_1 + x_2u_2 - \frac{r^2}{\sqrt{2}}\right)$$

لنأخذ النقطة $u^1 = (r,0)$ فنحصل على معادلة السطح:

$$H_1 : (rx_1)\left(rx_1 + \frac{r^2}{\sqrt{2}}\right)\left(rx_1 - \frac{r^2}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

عدد نقاط التقاطع $H_1 \cap S_1^{(r)}$ هو $s = 2k^{n-1} = 6$ ، هي:

$$x^1 = (0, r) \qquad x^2 = (0, -r) \qquad x^3 = \left(\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}\right)$$

$$x^4 = \left(\frac{r}{\sqrt{2}}, -\frac{r}{\sqrt{2}}\right), \quad x^5 = \left(-\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}\right) \quad x^6 = \left(-\frac{r}{\sqrt{2}}, -\frac{r}{\sqrt{2}}\right)$$

عدد النقاط التكاملية يساوي 8 والحد الأدنى لعدد هذه النقاط $N \geq 2M(n-1,k)=8$

، حيث: $\frac{1}{2b_i}=\left[2K_k\left(u^i,u^i\right)\right]^{-1}=\frac{r^2\pi}{4}$ ، وبما أن العلاقة التكعيبية (8) صحيحة من أجل الدوال حتى الدرجة السابعة، لإيجاد C_1 نختار الدالة $\left(x^2-\frac{r^2}{2}\right)(y+r)$، وبنفس الأسلوب نختار بقية الدوال، فنحصل على الثوابت:

x^i	C_i
$x^1,x^2,...,x^6$	$\frac{1}{4}\pi r^2$

الجدول (5): ثوابت العلاقة التكعيبية (8) من أجل $\widetilde{K}_3(u,x)$ و $n=2$.

●● لنشكل العلاقة التكعيبية من أجل النواة المولدة في (38)، ومن أجل الدقة الجبرية $d=2k+1=7$ ومن أجل $n=3$، نعوض في (38)، فنجد:

$$\widetilde{K}_3(u,x)=\frac{35}{2r^6\mu\left(S_3^{(r)}\right)}\left(\sum_{i=1}^{3}x_iu_i\right)\left(\sum_{i=1}^{3}x_iu_i+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}r^2\right)\left(\sum_{i=1}^{3}x_iu_i-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}r^2\right)$$

لنأخذ النقطة $u^1=(r,0,0)$ فنحصل على معادلة السطح:

$$H_1:(rx_1)\left(rx_1+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}r^2\right)\left(rx_1-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}r^2\right)=0$$

وبالتالي فإن $u^2=(0,r,0)$ والتي تعين السطح

$$H_2:(rx_2)\left(rx_2+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}r^2\right)\left(rx_2-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}r^2\right)=0$$

عدد نقاط التقاطع $H_1\cap H_2\cap S_2^{(r)}$ ب $s=2k^{n-1}=18$ نقطة، هي:

$$x^{1,2}=(0,0,\pm r),\ x^{3,4}=\left(0,-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}r,\pm\frac{2}{\sqrt{7}}r\right),\ x^{5,6}=\left(0,\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}r,\pm\frac{2}{\sqrt{7}}r\right)$$

$$x^{7,8}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}r,0,\pm\frac{2}{\sqrt{7}}r\right),\ x^{9,10}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}r,-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}r,\pm\frac{1}{\sqrt{7}}r\right)$$

$$x^{11,12}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}r,\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}r,\pm\frac{1}{\sqrt{7}}r\right),\ x^{13,14}=\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}r,0,\pm\frac{2}{\sqrt{7}}r\right)$$

$$x^{15,16}=\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}r,-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}r,\pm\frac{1}{\sqrt{7}}r\right),\ x^{17,18}=\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}r,\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}r,\pm\frac{1}{\sqrt{7}}r\right)$$

عدد النقاط التكاملية يساوي 20 والحد الأدنى لعدد هذه النقاط $N\geq 2M(n-1,k)=20$ ، حيث: $\frac{1}{2b_i}=\left[2\widetilde{K}_3\left(u^i,u^i\right)\right]^{-1}=\frac{r^3\pi}{20}$ ، وبما أن العلاقة التكعيبية (8) صحيحة من أجل الدوال حتى الدرجة السابعة، لإيجاد C_1 نختار الدالة $(z+r)\left(y^2-\frac{3}{7}r^2\right)\left(x^2-\frac{3}{7}r^2\right)$ ، وبنفس الأسلوب نختار بقية الدوال، فنجد قيم الثوابت:

x^i	C_i
x^1,x^2	$\frac{106}{135}\pi r^3$
x^3,x^4,x^5,x^6	$\frac{-77}{288}\pi r^3$
x^7,x^8,x^{13},x^{14}	$\frac{-91}{288}\pi r^3$
$x^{9,10,11,12,15,\ldots,18}$	$\frac{203}{540}\pi r^3$

الجدول (7): ثوابت العلاقة التكعيبية (8) من أجل $\widetilde{K}_3(u,x)$ و $n=3$

5. الاستنتاجات والتوصيات:

من خلال ماسبق، نجد أنه من المفيد زيادة درجة كثيرات الحدود للحصول على علاقة تكعيبية ذات دقة جبرية أعلى، ويمكن تعميم صيغة النواة المولدة من أجل أي درجة كثيرة حدود للحصول عليها دون استنتاج وهذا ما يتم العمل عليه ودراسته، ونوصي بالعمل على دراسة طريقة النواة المولدة في مناطق تكاملية جديدة، والعمل على دراستها في فضاءات أخرى.

6. قائمة المراجع:

[1]. G. PETROVA. 2004- Cubature Formulae For Spheres, Simplices And Balls. Taxas A&M University., Journal Of Computational And Applied Mathematics. 162,483-496.

[2]. H. M. Moller, 1976- Cubature Formulae mit minimaler Knotenzahl, Numer. Math., 35, pp.185-200.

[3] H. M. Moller, 1979- Lower bounds for the number of nodes in cubature formulae, Numerical Integration, Internat. Ser. Numer. Math. Vol. 45, G. Hammerlin, ed., Birkhauser, Basel.

[4] H.M. Moller, 1973-POLYNOMIALS AND CUBATURE FORMULAE, Ph.D. Thesis, Univ. Dortmund.

[5]. I.P. MYSOVSKIKH. 1969-Cubature Formulae And Orthogonal Polynomials. Zh. Vychisl. Mat. I Mat. Fiz., 9(2): 419-425.

[6]. I.P. MYSOVSKIKH. 1969-The Construction Of Interpolation Cubature Formulae With The Least Number Of Nodes. Tr. II. Respubl. Konf. Mat. Belorussii, Pages 42-48. 1969. (Russian), ZB 194. 18703.

[7]. I.P. MYSOVSKIKH. 1981- Interpolation Cubature Formulas. Moskva: “Nauka”. 336p., Moscow-Leningrad.

[8]. I.P. MYSOVSKIKH. 1985- Cubature Formulas In The Case Of Central Symmetry. Netody Vychisl., 14:35. (Russian), MR 90f:65035, ZB 754.41028.

[9].I.P. MYSOVSKIKH. 1995-Representation Of The Reproducing Kernels Of A Ball. Metody Vychisl., 17:145-152.

[10]. I.P. MYSOVSKIKH. 1996-A representation Of The Reproducing Kernels Of A Shpere. Zh. Vychisl. Mat. I mat. Fiz., 36(3):28-34, (Russian), Comput. Maths math. Phys. 36(3), 303-308(English).

[11]. KH. A. ABBAS and I.P. MYSOVSKIKH. 1991-On The Method Of Reproducing Kernel For Constructing Cubature Formulae. Vestnik Leninger. Univ., Ser. I, 22(4): 3-11. (Russian).

[12]. R. COOLS, I.P. MYSOVSKIKH, and H.J. Schmid. 2001-Cubature Formulae And Orthogonal Polynomials . J. Comput. Apply. Math., 127:121-152.

[13]. عباس، اصلان، 2022– التكاملات في المناطق الكروية في الفضاء $\Re^n$ بطريقة النواة المولدة، مجلة جامعة البعث.44.