

## دراسة في المنظومات الهاملتونية

### و متحولات الطاقة

اسم الباحث: محمد العلي

عنوان الباحث: قسم الرياضيات / كلية العلوم / جامعة البعث

البريد الالكتروني: [mali@albaath-univ.edu.sy](mailto:mali@albaath-univ.edu.sy)

#### الملخص

قدمنا في هذا البحث بعض المفاهيم التي تساعد على فهم السلوك الفوضوي للمنظومات الهاملتونية بعد إدخال اضطرابات صغيرة عليها. بعد تعريف متحول الطاقة للمنظومة الهاملتونية، قمنا بإيجاد علاقة رياضية تربط بين متحول الطاقة و تابع ميلنيكوف لهذه المنظومة. كما قمنا بتعريف تابع الإزاحة الزمنية من خلال تأخير زمني يتوافق مع الاضطراب في الشروط الابتدائية للمنظومة. قمنا أيضاً بتعريف تصوير جديد للمعاودة بالاعتماد على متحول الطاقة، حيث اعتبرنا في هذا التصوير نقاط فضاء الموضوع التي تمثل النهايات المحلية لتابع الطاقة. لقد قدمنا في نهاية البحث نتائج تطبيق هذه الطريقة على منظومة دفينغ فاندر بول الشهيرة.

الكلمات المفتاحية:

المنظومة الهاملتونية، المدار الهوموكليني، منحنى الفصل، المتنوعة المستقرة، المتنوعة غير المستقرة، تابع ميلنيكوف، تصوير المعاودة، الاضطراب.

# A study in Hamiltonian Systems and Energy Variables

Researcher's Name: Dr. Mohamad Alali

Address: Mathematics Dept. / Science Fac. / Albaath Univ.

Email Address: [mali@albaath-univ.edu.sy](mailto:mali@albaath-univ.edu.sy)

## Abstract

This work is an attempt to understand the chaotic behavior arising in a perturbed Hamiltonian system. After introducing the energy variable of such system, we established a relation between this variable and the well-known Melnikov Function of this system. Accordingly, we introduced the time-shift function which is a time delay corresponding to a given perturbation in initial conditions. Also, we defined a new return map related to the energy variable in which we consider the points of peak energy in the phase space of such system. Application of this method to the well-known *Duffing van der Poll* system and results are included at the end of this paper.

**Keywords:** Hamiltonian System, Homoclinic Orbit, Separatrix, Stable Manifold, Unstable Manifold, Melnikov Function,

## Return Map, Perturbation.

### 1. مقدمة:

تعتبر الفوضى بالمفهوم الأدبي واللغوي مفهوماً قديماً، حيث تظهر كمفردة لغوية وكمفهوم أدبي في روايات وقصص الآلهة عند الرومان القدماء و الإغريق. أما في المفهوم الرياضي الحديث، فالفوضى هي مفهومٌ جديدٌ، إلى حدٍ ما، تم اكتشافه من قبل لورانز [1] في الجاذب الديناميكي لنموذج رياضي يمثل منظومة الطقس التي كان يعمل عليها هذا الباحث.

لا يزال مفهوم الفوضى يجذب العديد من الباحثين في جميع مجالات العلوم بشكلٍ عام والرياضيات بشكلٍ خاص لدراسته و كتابة الأبحاث الجديدة حوله، حيث يمكن تصنيف هذه الدراسات و الأبحاث ضمن صنفين أساسيين

- (a) دراسات و أبحاث تهتم بإيجاد قوانين و معايير محددة تؤكد وجود أو عدم وجود السلوكية الفوضوية في المنظومة الديناميكية، أي مسألة التنبؤ بالفوضى.
- (b) دراسات و أبحاث تهتم بالسيطرة و التحكم بالسلوك الفوضوي للمنظومة الديناميكية في حال وجوده و تحديد الأساليب و الطرائق المختلفة لذلك، أي مسألة التحكم بالفوضى. وقد ظهرت في العقود الخمسة الأخيرة نتائج هامة و متميزة تتعلق بمسألة التنبؤ و وُضعت العديد من المعايير للتنبؤ بالسلوكية الفوضوية للمنظومة الديناميكية، كتاب ميلنيكوف و معاملات ليابونوف الأسية و بُعد الجاذب الديناميكي للمنظومة. وقد ظهرت أيضاً العديد من الأبحاث الأخرى المتعلقة بمسألة التحكم [2-11]، و لا يزال البحث جارياً عن طرائق و معايير جديدة.

### 2. طرائق ونتائج البحث:

سنعتمد خلال هذا البحث على الدراسة النظرية البحتة لموضوع البحث والإثباتات اللازمة لنتائج البحث. كما سنقوم بتدعيم هذه النتائج بتطبيق عملي يدعم ما سنحصل عليه من نتائج.

3. الدراسة النظرية و المناقشة:

من أجل أي تابع

$$H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x_1, x_2) \mapsto H(x_1, x_2)$$

نعرف التابع  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  بالشكل

$$F(x_1, x_2) = (F_1(x_1, x_2), F_2(x_1, x_2))$$

بحيث أن

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2) = \frac{\partial H}{\partial x_2}(x_1, x_2) \\ F_2(x_1, x_2) = -\frac{\partial H}{\partial x_1}(x_1, x_2) \end{cases} ; \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

و بالتالي يمكن أن نعرف المنظومة الديناميكية التالية

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = F_1(x_1, x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} = F_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

و التي يمكن كتابتها بالشكل المصفوفي التالي

$$\frac{dx}{dt} = F(x) \quad (1)$$

حيث أن  $x$  هي مصفوفة العمود  $(x_1 \ x_2)^T$ .

تسمى المنظومة (1) منظومة ديناميكية هاملتونية، كما يسمى التابع  $H$  تابع هاملتون لهذه المنظومة. و تتميز هذه المنظومة بأنها تملك تكاملاً أولاً من الشكل

$$H(x_1, x_2) = C \quad (2)$$

حيث أن  $C$  هو ثابت اختياري، يسمى ثابت الطاقة للمنظومة الديناميكية (1) و الذي يحدد سوية الطاقة للنقطة المتحركة على المسارات المختلفة لهذه المنظومة في مستوي الطور  $X_1 O X_2$ .

سنفرض، وبدون المساس بعمومية المسألة، أن هذه المنظومة تملك نقطة سرجية (Saddle Point) وحيدة في مبدأ الإحداثيات تنطبق من أجلها المنطويتين المستقرة و غير المستقرة لتشكلان معاً منحنى الفصل (Separatrix) و الذي يدعى في هذه الحالة دورة هوموكليينية (Homoclinic Orbit) للمنظومة، كما هو موضح في الشكل (1).

### 3.1. متحول الطاقة و تابع ميلنيكوف:

يادخال اضطراب دوري صغير من الشكل  $f(x, t)$  على الطرف الأيمن من المنظومة (1)، من أجل أي تابع  $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^2$  يحقق أن

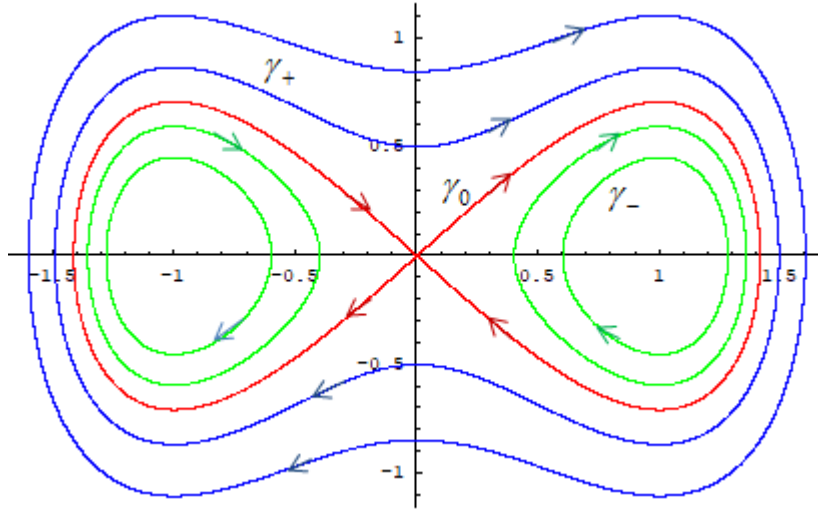
$$f(x, t + \tau) = f(x, t) ; \quad \forall x \in \mathbb{R}^2, \forall t \geq 0$$

حيث أن  $\tau \in \mathbb{R}^+$  هو دور التابع، سنحصل على منظومة مضطربة موافقة من الشكل

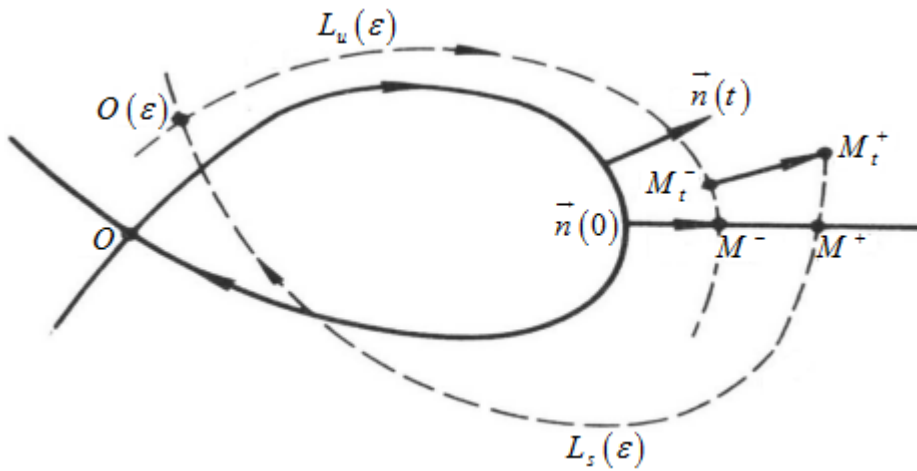
$$\frac{dx}{dt} = F(x) + \varepsilon f(x, t) \quad (3)$$

باعتبار أن  $0 < \varepsilon \ll 1$ ، فإننا نتوقع انزياح النقطة السرجية للمنظومة عن مبدأ

الإحداثيات  $O$  إلى الموضع  $O(\varepsilon)$  وانكسار الاتصال الهوموكلييني وانفصال المتنوعتين المستقرة  $L_s(\varepsilon)$  وغير المستقرة  $L_u(\varepsilon)$  للنقطة السرجية.



الشكل (1): شكل نموذجي لمستوي طور المنظومة (1) غير المضطربة.



الشكل (2): انكسار الاتصال الهوموكليني في المنظومة المضطربة.

لاحظ أيضاً امتلاك المنظومة (1) لنقطتين ثابتتين  $O_1$  و  $O_2$  على المحور  $OX_1$  هما مركزين مستقرين للمنظومة. كما أنه يمكن دائماً اختيار تابع هاملتون للمنظومة بحيث توافق القيمة  $C = 0$  منحنى الفصل و بحيث يمكن تصنيف مسارات المنظومة بالشكل

1. المسار  $\gamma_0$  الذي يوافق قيمة ثابت الطاقة  $C = 0$ , أي أن  $\gamma_0 \equiv \gamma (C = 0)$ .

2. المسارات  $\gamma_-$  التي توافق قيم ثابت الطاقة  $C < 0$ , أي أن  $\gamma_- \equiv \gamma (C < 0)$ .

3. المسارات  $\gamma_+$  التي توافق قيم ثابت الطاقة  $C > 0$ , أي أن  $\gamma_+ \equiv \gamma (C > 0)$ .

كما نتوقع أن تصف المعادلة (2) مسارات المنظومة المضطربة (3), بحيث يصبح ثابت الطاقة  $C$  متحولاً ندعوه متحول الطاقة في المنظومة المضطربة, أي أن  $C = C(x, t)$ . و بالتالي, باشتقاق طرفي العلاقة (2) بالنسبة للزمن, نجد أن

$$\frac{dC}{dt}(x, t) = \frac{d}{dt} H(x) = \frac{\partial H}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial H}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt}$$

و بما أن

$$\frac{\partial H}{\partial x_1} = -F_2(x) \quad , \quad \frac{\partial H}{\partial x_2} = F_1(x)$$

و باستخدام المنظومة (3), نجد أن

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dt}(x,t) &= -F_2(x) \{F_1(x) + \varepsilon f_1(x,t)\} \\ &\quad + F_1(x) \{F_2(x) + \varepsilon f_2(x,t)\} \\ &\Rightarrow \\ \frac{dC}{dt}(x,t) &= \varepsilon [F_1(x) f_2(x,t) - F_2(x) f_1(x,t)] \end{aligned}$$

و بتعريف الجداء الخارجي للتابعين  $F$  و  $f$  بالشكل

$$F \wedge f = F_1 f_2 - F_2 f_1$$

تصبح العلاقة الأخيرة بالشكل

$$\frac{dC}{dt}(x,t) = \varepsilon \{F(x) \wedge f(x,t)\} \quad (4)$$

العلاقة الأخيرة تبين أن النقطة المتحركة في مستوي الحالة للمنظومة المضطربة (3) سوف تنتقل بين سويات الطاقة المختلفة للمنظومة غير المضطربة (1) بحيث تبقى تغيرات الطاقة صغيرة و متناسبة مع الاضطراب الذي تم إدخاله على المنظومة الأساسية.

تحدد طريقة ميلنيكوف [2] الوضع النسبي بين المتنوعتين المستقرة  $L_s(\varepsilon)$  و غير المستقرة  $L_u(\varepsilon)$  للنقطة السرجية  $O(\varepsilon)$ , حيث يحدد تابع ميلنيكوف  $M(t_0)$  البعد بين هاتين المتنوعتين في لحظة زمنية  $t_0$  و الذي يعطى بالتكامل التالي

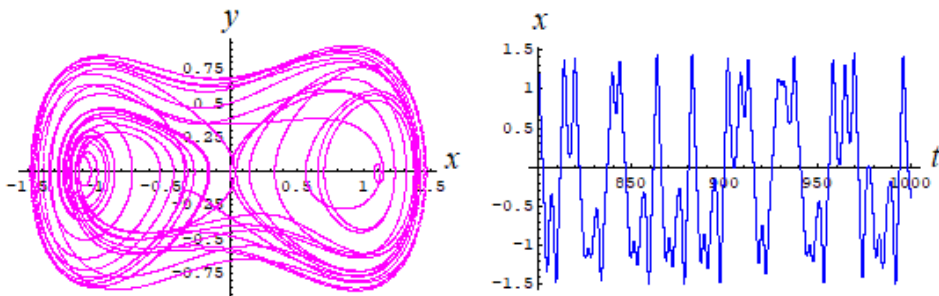
$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \{F(q_0(t-t_0)) \wedge f(q_0(t-t_0), t)\} dt$$

حيث تمثل  $q_0(t-t_0)$  المعادلات الوسيطة لمنحني الفصل في المنظومة غير المضطربة. و بتعويض العلاقة (4) في عبارة تابع ميلنيكوف السابقة, يصبح تابع



ميلنيكوف بالشكل

$$M(t_0) = \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dC}{dt} (q_0(t-t_0), t) dt \quad (5)$$



الشكل (3): مسار المنظومة المضطربة (3) في حال وجدت لحظة زمنية  $t_0$  يكون من أجلها

$$.M(t_0) = 0$$

تبين العلاقة الأخيرة المعنى الفيزيائي لتابع ميلنيكوف، حيث تبين هذه العلاقة أن تابع ميلنيكوف يمثل التغير الكلي لمتحول الطاقة على كامل المدار الهوموكليني للمنظومة (منحني الفصل). فإذا وجدت لحظة زمنية معينة  $t_0$  يكون من أجلها  $M(t_0) = 0$ ، أي وجود تقاطع بين المتنوعتين المستقرة و غير المستقرة، فإننا نتوقع من مسار المنظومة المضطربة أن يتأرجح على جانبي منحني الفصل بحيث ينتقل بين المسارات  $\gamma_+$  و  $\gamma_-$  للمنظومة غير المضطربة ليشكل مساراً قريباً كالمسار المبين في الشكل (3).

### 3.2. تابع الإزاحة الزمنية:

لنعتبر مساراً  $x(t)$  للمنظومة المضطربة (3) يحقق الشرط الابتدائي  $x(t_0) = x^0$ ، و لنعتبر مساراً مجاوراً  $x_\delta(t)$  لهذا المسار يحقق الشرط الابتدائي  $x_\delta(t_0) = x^0 + \delta e$ ، حيث أن  $0 < \delta \ll 1$  و  $e = (e_1 \ e_2)^T$  هو متجه واحدة في مستوى الحالة للمنظومة، أي أن

$$\begin{cases} e_1 = \cos(\theta) \\ e_2 = \sin(\theta) \end{cases} ; 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

و نعتبر الحالة التي يمر فيها المسار  $x(t)$  من نقطة  $x^1$  في مستوي الحالة في

لحظة زمنية ما  $t_1$  يكون فيها  $\frac{dC}{dt}(x^1, t_1) = 0$ . سنهتم في هذه الفقرة بحساب

الفارق الزمني  $\delta_t$  اللازم للمسار  $x_\delta(t)$  لكي يمر بنقطة  $x_\delta^1 = x_\delta(t_1 + \delta_t)$

$$\frac{dC}{dt}(x_\delta^1, t_1 + \delta_t) = 0$$

لسهولة المسألة, سوف نعتبر أن  $t_1 = t_0$ , أي أن

$$\frac{dC}{dt}(x^0, t_0) = 0, \quad \frac{dC}{dt}(x_\delta^0, t_0 + \delta_t) = 0 ; \quad x_\delta^0 = x_\delta(t_0 + \delta_t)$$

بفرض أن  $\delta$  صغير بقدر كافٍ, و باستخدام منشور تايلور و باستخدام الحدود من الدرجة الأولى فقط, سنجد أن

$$x_\delta^0 = x^{(0)} + \delta e + \delta_t \{F + \varepsilon f\}(x^{(0)}, t_0)$$

و باستخدام الشرط

$$\frac{dC}{dt}(x_\delta(t_0 + \delta_t), t_0 + \delta_t) = 0$$

سيكون

$$\delta_t = \delta K_\theta(x, t)$$

حيث أن

$$K_\theta(x, t) = -\varepsilon \{(\mathfrak{I}e) \wedge f + F \wedge (\mathfrak{I}_1 e)\} / \frac{d^2C}{dt^2} \quad (6)$$

و ذلك بشرط أن يكون  $\frac{d^2C}{dt^2} \neq 0$ , حيث أن  $\mathfrak{S} = \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)$  و  $\mathfrak{S}_1 = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)$  هي المصفوفات اليعقوبية للتابعين  $F$  و  $f$  على الترتيب. كما سندعو التابع  $K_\theta(x,t)$  تابع الإزاحة الزمنية.

تبين العلاقة (6) أهمية كون المشتق الثاني  $\frac{d^2C}{dt^2}$  لمتحول الطاقة غير معدوم. ففي

النقاط  $x$  التي يكون فيها  $\frac{d^2C}{dt^2}(x,t) = 0$  في لحظة زمنية ما  $t$ , فإن تابع

الإزاحة الزمنية يكون غير معرف و بالتالي غير موجود. أي أنه سيكون للمسارين المتجاورين ديناميكيتان مختلفتان, و بالتالي ستتباعدان بشكل سريع (أسي) عن بعضهما مما سيؤدي لظهور الديناميكية الفوضوية في سلوك المنظومة. و بالتالي فإنه و مهما كان المساران قريبان من بعضهما فلا بد أن يتفرقا و يبتعدا عن بعضهما.

لذلك سندعو الحالة  $(x,t)$  التي يكون عندها  $\frac{dC}{dt} = 0$  و  $\frac{d^2C}{dt^2}(x,t) = 0$  نقطة حرجة للطاقة.

#### 4. تطبيق:

لنعتبر المنظومة الديناميكية (1) الموافقة للتابعين

$$\begin{cases} F \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x - x^3 \end{bmatrix} \\ f \begin{bmatrix} 0 \\ p(x^2 - 1)y + q \cos(\omega t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

حيث أن  $p, q, \omega$  هي وسطاء للمنظومة ذات قيم موجبة.

تدعى هذ المنظومة منظومة هزاز دفينغ - فاندربول [10], و قد قمنا بدراسة هذه

المنظومة و استنتاج تابع ميلنيكوف لها و هو

$$M(t_0) = \pm Aq \text{ Sin}(\omega t) - D$$

حيث أن

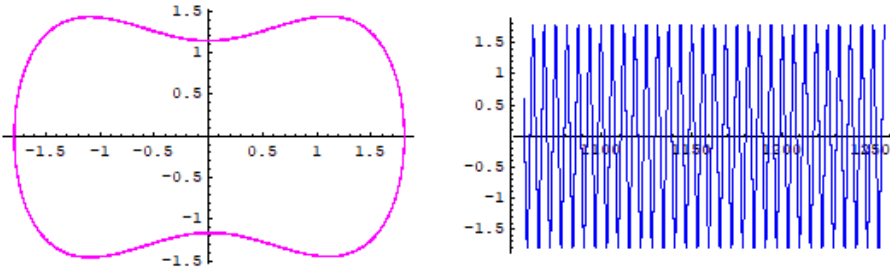
$$A = \sqrt{2} \pi \omega \text{ Sech}\left(\frac{\pi \omega}{2}\right)$$

$$D = \frac{4}{15} p$$

و باستخدام العلاقة (4), وجدنا أن

$$\frac{dC}{dt} = \varepsilon y \left[ p(x^2 - 1)y + q \text{ Cos}(\omega t) \right]$$

يبين الشكل (1) فضاء الحالة للمنظومة غير المضطربة. و باستخدام قيم الوسطاء  $q = 3$  و  $\omega = 3$  و وضع  $\varepsilon = 0.1$ , قمنا برسم مسارات المنظومة التي بينت وجود السلوكية الفوضوية في المنظومة من أجل  $p = 0.07$  الموضحة في الشكل (3). كما بينا وجود سلوكية غير الفوضوية من أجل  $p = 0.08$  الموضحة في الشكل (4).



الشكل (4): مسار المنظومة المضطربة (3) في حال عدم وجود لحظة زمنية  $t_0$  يكون من أجلها

$$M(t_0) = 0$$

5. النتائج والمقترحات:

لقد بينت نتائج هذا البحث أهمية نظرية ميلنيكوف في دراسة المنظومات الديناميكية الهاملتونية، حيث توفر هذه النظرية آلية حسابية للتنبؤ بوجود السلوكية الفوضوية في هذه المنظومات. كما يمكن استنتاج الأهمية الكبيرة لنظرية ميلنيكوف في دراسة المنظومات الديناميكية، لكون أي منظومة ديناميكية يمكن إرجاعها إلى شكل مضطرب لمنظومة هاملتونية.

و قد بينت الدراسة النظرية المقدمة خلال هذا البحث الارتباط الوثيق من خلال العلاقة (6) التي قمنا باستنتاجها بين تابع ميلنيكوف و متحول الطاقة الذي قمنا بتعريفه في هذا البحث، حيث قدمت هذه العلاقة تفسيراً جديداً للسلوكية الفوضوية الموجودة في المنظومات الهاملتونية.

يجب أن تولى الأهمية لدراسة منحنيات و سطوح سوية الطاقة في المنظومة الهاملتونية و التوسع في دراسة تابع الإزاحة الزمنية للمنظومة المعطى بالعلاقة (6) لما نتوقعه من انعكاس النتائج التي يمكن الحصول عليها على مسألة التنبؤ و التحكم بالفوضى في المنظومات الديناميكية، و هذا ما سنقوم بالتركيز عليه في الأبحاث المستقبلية.

#### المراجع:

- [1] E.N. Lorenz, 1963. J. Atmos. Sci. 20, p. 130.
- [2] P. G. Drazin, 1992. "Nonlinear systems", Cambridge Univ. Press, pp. 251–260.
- [3] Abid, pp. 140–143; H. van Beijeren, J. R. Dorfman, E. G. D. Cohen, H. A. Posch and Ch. Dellago, 1996. Phy. Rev. Lett. 77, p. 1974.

- [4] J. D. Farmer, E. Ott and J. A. Yorke, 1983. *Physica* 7D, pp. 153–180.
- [5] E. Ott, C. Grebogi and J. A. Yorke, 1990. *Phy. Rev. Lett.* 64, p. 1196.
- [6] R. Lima and M. Pettini, 1990. *Phy. Rev. A* 41, p. 726; F. Cuadros and R. Chacon, 1993. *Phy. Rev. E* 47, p. 4628; R. Lima and M. Pettini, 1993. *Phy. Rev. E* 47, p. 4630.
- [7] T. Kapitaniak, 1991. *Int. J. Bifurcation and Chaos* 1, pp. 357–362.
- [8] S. Rajasekar and M. Lakshmanan, 1993. *Physica D* 67, pp. 282–300.
- [9] Recardo Chacon, 1996. *Phy.Rev.Lett.* 77, p. 482.
- [10] S Rajasekar, 1993. *Pramana J. Phys* 41, p. 295.
- [11] G. Cicogna and M. Santoprete, 2000. *J. Math. Phys.* 41, p. 805.