تعميم طريقة متجه تشيفر في حل مسائل الحالة المستوية، الأولى لانفعالات الجسم الصلب المرن الخاضع لحرارة

أ.د. منتجب الحسن[1] ط. علي جودت لولو[2]

ملخص البحث:

يتعلق البحث بالنموذج الرياضي للحالة المستوية الأولى للانفعالات المرنة للجسم الصلب دقيق الاستقطاب، والمتجانس، والمتماثل المناحي والخاضع لحرارة، والمناقش رياضياً من خلال الباحثين إرينغين [1] و ونوفاتسكي [2]، والذي يرمز له اختصاراً بـ 2D(E−N:6).

في البحث سنعمم طريقة متجه تشيفر لحل مسألة لامي للقيم الحدية والابتدائية للجسم (2D(E−N:6، الخاضع لحرارة، والذي يشغل في لحظة البدء منطقة Ω بسيطة الترابط في المتنوعة الاقليدية R^2. في النهاية سننهي البحث باقتراح عدد من المسائل للمناقشة.

[1] أستاذ في قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة البعث.

[2] خريج ماجستير من قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة البعث.

الكلمات المفتاحية: طريقة متجه تشيفر ، مسألة لامي للقيم الحدية والابتدائية للجسم 2D(E−N:6) الخاضع لحرارة.

تعميم طريقة متجه تشيفر في حل مسائل الحالة المستوية، الأولى لانفعالات الجسم الصلب المرن الخاضع لحرارة

Generalizing the Schaefer vector method for solving first plane state problems of micropolar elastic solid subjected to temperature field

Prof. Mountajab Al-Hasan † **&** **Ali Jawdat Loulou ‡**

Abstruct

This paper concerns the mathematical model of first plane state of elastic strains of micropolar homogeneous and isotropic solid, subjected to temperature field, mathematically discussed by Eringen [1] and Nowacki [2], and shortly called 2D (E-N:6).
In this paper, we generalize the Schaefer vector method to solve the Lame initial-boundary value problem for the 2D (E-N:6) body, subjected to temperature field for which initial configuration is simple-connected region Ω in the Euclidean manifold R^2. Finally, we end this paper by suggesting new problems for discussing.

† Professor At Department of Mathematics–Faculty of Science – Al–Baath University.
‡ Master Student At Department of Mathematics–Faculty of Science–Al–Baath University.

Key words: Schafer vector method , the Lame initial-boundary value problem for the 2D (E-N:6) body subjected to temperature field.

1. مقدمة:

في [4] استُخدمت طريقة متجه تشيفر، في حل مسائل القيم الحدية لمعادلات لامي ضمن الحالة المستوية الأولى لانفعالات الجسم (E−N:6)، وذلك انطلاقاً من متجه تشيفر: $\zeta \equiv \left(0\ ,\ 0\ ,\ \frac{1}{2}\in_{\alpha\beta} u_{\beta\ ,\alpha}\right)$، (حيث: $\alpha\ ,\ \beta = 1\ ,2$)، وحيث $\in_{\alpha\beta}$ هو تنسور ليفي− تشيفيتا النسبي على الفضاء الاقليدي ثنائي البعد R^2. بعدها تم وبنفس الطريقة، حل مسائل القيم الحدية لمعادلات لامي للحالة ثنائية البعد للانفعالات المرنة للجسم من النموذج (E−N:6)،حيث الانفعالات المرنة متناظرة محورياً (انظر مثلاً: [5,7])، كما أشار نفس الباحثين إلى إمكانية حل نفس هذه المسائل، أي مسائل القيم الحدية لمعادلات لامي للحالة ثنائية البعد وكذلك الحالة ثلاثية البعد للانفعالات المرنة للجسم من النموذج (E−N:6)، بوجود حقل درجات حرارة، وبوجود حقل لدونة. وفي عام 2004 قام الباحث ديشليفيتش في [3] باستخدام طريقة متجه تشيفر، في حل مسائل القيم الحدية والابتدائية لمعادلات لامي للحالة المستوية الأولى للانفعالات المرنة للجسم من نموذج (E−N:6)، بما يتوافق مع الحالة الديناميكية، المتساوية درجات الحرارة لهذا الجسم.

2. هدف البحث:

يهدف البحث إلى تعميم طريقة متجه تشيفر[3] إلى حل مسألة لامي للقيم الحدية والابتدائية للجسم (E−N:6) 2D، المتجانس والمتماثل المناحي والخاضع لحرارة، ويشغل في لحظة البدء منطقة Ω بسيطة الترابط في المتنوعة الاقليدية R^2.

3. طرق البحث:

سنستخدم طريقة تمثل تعميماً لطريقة متجه تشيفر الموجودة في إلى الحالة الترموديناميكية للجسم (E−N:6) 2D، المتجانس والمتماثل المناحي والخاضع لحرارة. من أجل متطلبات البحث، سنعرض بدايةً وبشكل مختصر، نتائج البحث [3] المتمثلة بالنموذج الرياضي التقليدي ونموذج لامي الرياضي للجسم (E−N:6) 2D، الخاضع لحرارة، والذي سنفرض أنه متجانس ومتماثل المناحي ويشغل في لحظة البدء منطقة Ω بسيطة الترابط في المتنوعة الإقليدية R^2.

3-1مسألتا الوصف التقليدي ووصف لامي للحالة الترموديناميكية للجسم المرن (E-N:6)2D، المتجانس والمتماثل المناحي، والخاضع لحرارة، ضمن الحالة المستوية الأولى للانفعالات المرنة، حيث يشغل الجسم في لحظة البدء المنطقة بسيطة الترابط Ω في المتنوعة الاقليدية ثنائية البعد R^2:

توطئة: سنفترض أن جميع الأدلة الإغريقية $\alpha, \beta, \gamma, ...$ تأخذ القيم $1, 2$ وسنعتمد رموز Einstein في المتنوعة الإقليدية ثنائية البعد R^2، ولتكن $O x_1 x_2 x_3$ جملة إحداثية ديكارتية قائمة، ومباشرة، وعطالية، وقاعدتها هي $(\mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3)$.

لأجل الحالة المستوية الأولى للانفعالات المرنة للجسم المدروس، تكون كافة المقاطع التنسورية الحاكمة للحالة الترموديناميكية للجسم المعتبر، تكون مستقلة عن الاحداثي الديكارتي الثالث x_3، حيث توصف العملية الترموديناميكية للجسم المعتبر المتجانس والمتماثل المناحي بواسطة مجموعة المقاطع التنسورية:

$(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}, \theta, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\kappa})$، حيث أن: $\mathbf{u}$ و $\boldsymbol{\varphi}$ مقطعان متجهيان مستقلان، وهما على الترتيب، مقطع الإزاحات ومقطع التوجهات، و $\theta := \mathrm{T} - \mathrm{T}_0$ حقل سلمي ؛ يمثل تغير حقل الحرارة؛ حيث T الحرارة المطلقة في الجسم و T_0 حرارة الحالة الطبيعية له.

إضافةً إلى ماتقدم ذكره فإن: $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\kappa}$، مقاطع تنسورية من المرتبة الثانية، هي على الترتيب: مقطع إجهادات القوة، ومقطع إجهادات العزم، ومقطع الانفعالات، ومقطع الانفعالات دقيقة الاستقطاب. وإذا رمزنا بـ $\mathrm{T}^+ :=]0, \infty[$، و بـ $\mathrm{T} := [0, \infty[$، فيمكن أن تمثل الحقول السابقة في $\Omega \times \mathrm{T}^+$ وفي النظام الإحداثي الديكارتي $\mathbf{e}_i$، بالشكل:

$$\mathbf{u} \equiv (u_1, u_2, 0) \quad , \quad \boldsymbol{\varphi} \equiv (0, 0, \varphi_3) \qquad (3.1)$$

$$\boldsymbol{\gamma} \equiv \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & 0 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{\kappa} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & \kappa_{13} \\ 0 & 0 & \kappa_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (3.2)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{\mu} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mu_{13} \\ 0 & 0 & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & 0 \end{bmatrix} \qquad (3.3)$$

حيث:

$$\sigma_{33} = \nu\, \sigma_{\alpha\alpha} - \frac{\mu}{\mu+\lambda}\, \nu_T\, \theta\ ,\ \ \mu_{3\alpha} = \frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\, \mu_{\alpha 3} \qquad (3.4)$$

كما أن: $\nu = \dfrac{\lambda}{2(\mu+\lambda)}$ تمثل نسبة بواسون، و $\nu_T = (3\lambda+2\mu)\, a_t$، و a_t يمثل معامل التمدد الخطي الحراري للجسم، و $\mu\ ,\ \lambda\ ,\ \gamma\ ,\ \varepsilon \in R_+$ تمثل ثوابت مادية للجسم المدروس، أخيراً ننوه إلى أن جميع المركبات الموجودة في العلاقات السابقة تتبع للموضع: $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2) \in \Omega$ وللزمن t.

أولاً) الوصف التقليدي: يتألف الوصف التقليدي للحالة الترموديناميكية للجسم 2D(E−N:6) المتجانس والمتماثل المناحي، والخاضع لحرارة، ضمن الحالة المستوية الأولى للانفعالات المرنة، يتألف من المعادلات والعلاقات الأساسية والشروط الحدية والابتدائية التالية [3]:

معادلات الحركة، المحققة في $\Omega \times \mathrm{T}^+$:

$$\sigma_{\beta\alpha,\beta} + X_\alpha = \rho\, \ddot{u}_\alpha\ ,\quad \in_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} + \mu_{\beta 3,\beta} + Y_3 = J\, \ddot{\varphi}_3 \qquad (3.5)$$

حيث: $J\ ,\ \rho$ ، على الترتيب تمثلان الكثافة الحجمية والعطالة الدورانية للجسم المعتبر و $\mathbf{X} \equiv (X_1\, , X_2\, , 0)$ هو مقطع القوة الحجمية و $\mathbf{Y} \equiv (0\, , 0\, , Y_3)$ مقطع العزم الحجمي. نرمز بواسطة الفاصلة الدليلية للمشتق الجزئي بالنسبة لمتحولات الموضع: $f_{,\beta} = \dfrac{\partial f}{\partial x_\beta}$ ، كما نرمز بالنقطة للمشتق الجزئي بالنسبة للزمن : $\dot{f} \equiv \partial f/\partial t$. أخيراً الرموز $\in_{\alpha\beta}$ تمثل المركبات الديكارتية لتنسور ليفي− تشيفيتا، النسبي، من المرتبة الثانية.

معادلات انسجام الانفعالات، المحققة في $\Omega \times \mathrm{T}$:

$$\begin{aligned} &\kappa_{23,1} - \kappa_{13,2} = 0\ ,\ \ \kappa_{13} - \gamma_{21,1} + \gamma_{11,2} = 0\ , \\ &\kappa_{23} + \gamma_{12,2} - \gamma_{22,1} = 0 \end{aligned} \qquad (3.6)$$

العلاقات الهندسية، المحققة في $\Omega \times \mathrm{T}^+$:

$$\gamma_{\alpha\beta} = u_{\beta,\alpha} + \in_{\beta\alpha} \varphi_3\ \ ,\ \ \ \kappa_{\alpha 3} = \varphi_{3,\alpha} \qquad (3.7)$$

العلاقات التأسيسية، المحققة في $\Omega \times \mathrm{T}$:

$$\begin{aligned} &\sigma_{\alpha\beta} = (\mu+\alpha)\, \gamma_{\alpha\beta} + (\mu-\alpha)\, \gamma_{\beta\alpha} + (\lambda e_1 - \nu_T\, \theta)\, \delta_{\alpha\beta}\ , \\ &\mu_{\alpha 3} = (\gamma+\varepsilon)\, \kappa_{\alpha 3} \end{aligned} \qquad (3.8)$$

حيث $\alpha \in R_+$ الثابت المادي الخامس للجسم، و $e_1 = \gamma_{\varepsilon\varepsilon}$، أما $\delta_{\alpha\beta}$ فهو رمز دلتا كرونيكا،

معادلات الحرارة والانفعال، المحققة في $\Omega \times T^+$:

$$\theta_{,\alpha\alpha} - \frac{1}{\kappa}\dot{\theta} - \eta_0 \dot{e}_1 = -\frac{Q}{\kappa} \qquad (3.9)$$

حيث :

$$Q = \frac{\kappa W}{\lambda_0} \ , \ \ \kappa = \frac{\lambda_0}{c_{\varepsilon}} \ , \ \eta_0 = \frac{v_T T_0}{\lambda_0}$$

علماً أن Q يمثل المصادر الحرارية في الجسم المعتبر ، و W كمية الحرارة المشكَلة في وحدة الحجم ووحدة الزمن ، و λ_0 معامل التوصيل الحراري ، و c_{ε} تمثل الحرارة النوعية من أجل تشوه ثابت، كما أن: $\dot{e}_1 = \dot{\gamma}_{\varepsilon\varepsilon}$،

الشروط الحدية المحققة على $\partial\Omega \times T$:

$$\sigma_{\beta\alpha} n_\beta = p_\alpha \ , \ \mu_{\alpha 3} n_\alpha = m_3 \ , \ \theta = \vartheta \qquad (3.10)$$

حيث التوابع $[(p_\alpha, m_3, \vartheta) : \partial\Omega \times T \to R]$ معروفة ، و $\partial\Omega$ هي الحدود الملساء للمنطقة Ω $(\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega)$، أما n_β فهي المركبات الديكارتية لمتجه واحدة الناظم على $\partial\Omega$، والموجه نحو خارج $\partial\Omega$.

الشروط الابتدائية المحققة في $\Omega \times \{0\}$:

$$u_\alpha = f_\alpha \ , \ \varphi_3 = f_3 \ , \ \theta = \ell \ , \ \dot{u}_\alpha = g_\alpha \ , \ \dot{\varphi}_3 = g_3 \qquad (3.11)$$

حيث التوابع $[(f_\alpha, f_3, \ell, g_\alpha, g_3) : \Omega \to R]$ معروفة.

ثانياً) وصف لامي: يتألف وصف لامي للحالة الترموديناميكية للجسم 2D (E−N:6) المتجانس والمتماثل المناحي، والخاضع لحرارة، ضمن الحالة المستوية الأولى للانفعالات المرنة، يتألف من المعادلات والعلاقات الأساسية والشروط الحدية والابتدائية التالية [3]:

معادلات لامي للحركة، المحققة في $\Omega \times T^+$:

$$\Box_2 u_\alpha + (\lambda + \mu - \alpha) u_{\beta,\beta\alpha} + 2\alpha \in_{\alpha\gamma} \varphi_{3,\gamma} - v_T \theta_{,\alpha} + X_\alpha = 0 \qquad (3.12)$$

$$\Box_4 \varphi_3 + 2\alpha \in_{\alpha\beta} u_{\beta,\alpha} + Y_3 = 0 \ , \qquad (3.13)$$

$$D\theta - \eta_0 \dot{u}_{\varepsilon,\varepsilon} = -\frac{Q}{\kappa} \qquad (3.14)$$

حيث: $\square_2 = (\mu+\alpha)\Delta_1 - \rho\,\partial_t^2$ و $\square_4 = (\gamma+\varepsilon)\,\Delta_1 - 4\alpha - J\,\partial_t^2$

و $D = \Delta_1 - \frac{1}{\kappa}\,\partial_t$ و Δ_1 هو مؤثر لابلاس الاشتقاقي السلمي ثنائي البعد: $(\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2})$ ، أما $\partial_t f = \dot{f} = \partial f / \partial t$،

العلاقات الهندسية، المحققة في $\Omega \times T^+$:

$$\gamma_{\alpha\beta} = u_{\beta,\alpha} + \in_{\beta\alpha}\varphi_3 \quad , \quad \kappa_{\alpha 3} = \varphi_{3,\alpha} \tag{3.15}$$

العلاقات التي تعطي الإجهادات بدلالة الإزاحات والحرارة والدورانات، والمحققة في $\Omega \times T^+$:

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha\beta} = (\mu+\alpha)\,u_{\beta,\alpha} + (\mu-\alpha)u_{\alpha,\beta} - 2\alpha \in_{\alpha\beta}\varphi_3 + \\ + (\lambda u_{\varepsilon,\varepsilon} - \nu_T\,\theta)\,\delta_{\alpha\beta}\ ,\end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\mu_{\alpha 3} = (\gamma+\varepsilon)\,\varphi_{3,\alpha} \tag{3.17}$$

الشروط الحدية المحققة على $\partial\Omega \times T$:

$$\begin{aligned}[(\mu+\alpha)u_{\alpha,\beta} + (\mu-\alpha)u_{\beta,\alpha} - 2\alpha \in_{\beta\alpha}\varphi_3]n_\beta + \\ + (\lambda u_{\varepsilon,\varepsilon} - \nu_T\,\theta)\,n_\alpha = p_\alpha\ ,\end{aligned} \tag{3.18}$$

$$(\gamma+\varepsilon)\,\varphi_{3,\alpha}n_\alpha = m_3 \quad , \quad \theta = \vartheta \tag{3.19}$$

الشروط الابتدائية المحققة في $\Omega \times \{0\}$:

$$u_\alpha = f_\alpha\ ,\ \varphi_3 = f_3\ ,\ \theta = \ell\ ,\ \dot{u}_\alpha = g_\alpha\ ,\ \dot{\varphi}_3 = g_3 \tag{3.20}$$

4. النتائج والمناقشة:

فيمايلي سنناقش تعميم طريقة متجه تشيفر[3.pp.217] إلى حل مسألة لامي للجسم 2D (E−N:6) الخاضع لحرارة، ضمن الحالة المستوية الأولى للانفعالات المرنة، باتباع الآتي:

بتعويض المركبة: $\zeta_3 = \frac{1}{2}\in_{\alpha\beta}u_{\beta,\alpha} - \varphi_3$ لمتجه تشيفر: $\boldsymbol{\zeta} \equiv (0\ ,0\ ,\zeta_3)$ في المعادلتين (3.12) و(3.13)، من ثم بالاستفادة من العلاقة:

$$\in_{\alpha\gamma}\in_{\varepsilon\delta} = \delta_{\alpha\varepsilon}\delta_{\gamma\delta} - \delta_{\alpha\delta}\delta_{\gamma\varepsilon} \tag{4.1}$$

نحصل على المعادلتين التاليتين المحققتين في $\Omega \times \mathrm{T}^{+}$:

$$\overset{*}{\square}_2 u_\alpha + (\lambda+\mu) u_{\beta,\beta\alpha} - v_T\,\theta_{,\alpha} + X_\alpha = 2\alpha \in_{\alpha\gamma} \zeta_{3,\gamma} \tag{4.2}$$

$$\overset{*}{\square}_4 \in_{\alpha\beta} u_{\beta,\alpha} + 2Y_3 = 2\,\square_4 \zeta_3 \tag{4.3}$$

حيث $\overset{*}{\square}_2$ و $\overset{*}{\square}_4$ ، على الترتيب هما $\square_2$ و $\square_4$ بعد تعويض $\alpha = 0$.

لنفترض الآن أن:

$$\begin{aligned} &u_\alpha = u_\alpha^0 + u'_\alpha \;\; , \varphi_3 = \varphi_3^0 + \varphi'_3 \;\; , \quad \theta = \theta^0 + \theta' \;\; , \\ &\zeta_3 = \zeta_3^0 + \zeta'_3 \;\; , Y_3 = Y_3^0 + Y'_3 \;\; , \end{aligned} \tag{4.4}$$

حيث المقاطع: $u_\alpha^0 \;,\; \varphi_3^0 \;,\; \theta^0$ تتعلق بجسم هوك ضمن المرونة التقليدية المترابطة مع حقل حراري. عندئذٍ بوضع : $\zeta_i^0 = 0$ ، نصل إلى مسألة القيم الحدية– الابتدائية للجسم في إطار المرونة الخطية التقليدية المترابطة مع حقل حرارة، حيث نحصل من المعادلة (4.2) على معادلات لامي التقليدية التالية المحققة في $\Omega \times \mathrm{T}^{+}$:

$$\overset{*}{\square}_2 u_\alpha^0 + (\lambda+\mu) u_{\beta,\beta\alpha}^0 - v_T\,\theta_{,\alpha}^0 + X_\alpha = 0 \tag{4.5}$$

إن المعادلة (4.5) مترابطة مع المعادلة (3.14)، التي هنا لأجل: u_α^0 , θ^0 تأخذ الشكل التالي في $\Omega \times \mathrm{T}^{+}$:

$$\mathrm{D}\,\theta^0 \;-\; \eta_0 \dot{u}_{\varepsilon,\varepsilon}^0 = -\frac{Q}{\kappa} \tag{4.6}$$

إلى ذلك نضيف الشروط الحدية والابتدائية، التقليدية التالية، التي نحصل عليها من الشروط الحدية والابتدائية (3.10) و(3.11):

الشروط الحدية المحققة على $\partial\Omega \times \mathrm{T}$:

$$\sigma_{\beta\alpha}^0 n_\beta = p_\alpha \;\;,\;\; \theta^0 = \vartheta \tag{4.7}$$

حيث $\sigma_{\beta\alpha}^0$ هي المركبات الديكارتية لمقطع الإجهادات التقليدي $\boldsymbol{\sigma}^0$.

الشروط الابتدائية المحققة في $\Omega \times \{0\}$:

$$u_\alpha^0 = f_\alpha \;,\;\; \theta^0 = \ell \;,\; \dot{u}_\alpha^0 = g_\alpha \tag{4.8}$$

الآن من المعادلة (4.3) ، لأجل ($\zeta_3^0 = 0$ و $Y_3^0 = 0$) ، تنفصل أو تخرج المعادلة التالية، المحققة في: $\Omega \times \mathrm{T}^+$:

$$2\overset{*}{\square}_2 \varphi_3^0 + \in_{\alpha\beta} X_{\beta,\alpha} = 0 \tag{4.9}$$

الناتجة عن المعادلة (4.5)، والعلاقة التقليدية:

$$2\varphi_3^0 = \in_{\alpha\beta} u_{\beta,\alpha}^0 \tag{4.10}$$

من نظام المعادلات (4.2) و(4.3) و(3.14) و (4.5) و (4.6) و (4.9) نحصل على جملة المعادلات التالية المحققة في $\Omega \times \mathrm{T}^+$ لأجل θ' , ζ_3 , u'_α :

$$\overset{*}{\square}_2 u'_\alpha + (\lambda + \mu) u'_{\beta,\beta\alpha} - \nu_T \theta'_{,\alpha} + \hat{X}_\alpha = 2\alpha \in_{\alpha\gamma} \zeta_{3,\gamma} \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned} \overset{*}{\square}_4 \in_{\alpha\beta} u'_{\beta,\alpha} + 2\bar{Y}_3 - 2\square_4 \zeta_3 = \\ = 2(\gamma + \varepsilon)(c_4^{-2} - \hat{c}_2^{-2})\ddot{\varphi}_3^0 \end{aligned} \tag{4.12}$$

$$\mathrm{D}\,\theta' - \eta_0 \dot{u}'_{\varepsilon,\varepsilon} = -\frac{\hat{Q}}{\kappa} \tag{4.13}$$

حيث:

$$\begin{aligned} & c_4^2 = \frac{\gamma + \varepsilon}{J}, \quad \hat{c}_2^2 = \frac{\mu}{\rho}, \quad \hat{X}_\alpha = 0, \quad \hat{Q} = 0, \\ & \bar{Y}_3 = Y_3 - \frac{\gamma + \varepsilon}{2\mu} \in_{\alpha\beta} X_{\beta,\alpha} \end{aligned} \tag{4.14}$$

إلى جملة المعادلات (4.13)−(3.12) نضيف الشروط الحدية والابتدائية التالية:

الشروط الحدية المحققة على $\partial\Omega \times \mathrm{T}$:

$$\sigma'_{\beta\alpha} n_\beta = 0 \ , \ \mu'_{\alpha 3} n_\alpha = m_3 - m_3^0 \ , \ \theta' = 0 \tag{4.15}$$

الشروط الابتدائية المحققة في $\Omega \times \{0\}$:

$$u'_\alpha = 0, \ \varphi'_3 = f_3 - f_3^0, \ \theta' = 0, \ \dot{u}'_\alpha = 0, \ \dot{\varphi}'_3 = g_3 - g_3^0 \tag{4.16}$$

حيث المقادير: m_3^0 و f_3^0 و g_3^0 تنتج عن حل مسألة القيم الحدية والابتدائية التقليدية (4.8)- (4.5) وعن العلاقات التقليدية:

$$\varphi_3^0 = \frac{1}{2} \in_{\alpha\beta} u^0_{\beta,\alpha} \;, \quad \kappa^0_{\alpha 3} = \varphi^0_{3,\alpha} \,, \\ \mu^0_{\alpha 3} = (\gamma+\varepsilon)\, \kappa^0_{\alpha 3} \;, \;\; m_3^0 = \mu^0_{\alpha 3} n_\alpha \tag{4.17}$$

حيث:

$$f_3^{\,0}(\mathbf{x}) = \lim_{t\to 0} \varphi_3^0(\mathbf{x},t) \;, \;\; g_3^0(\mathbf{x}) = \lim_{t\to 0} \frac{\partial \varphi_3^0}{\partial t}(\mathbf{x},t) \;;\; \mathbf{x}\in\Omega \tag{4.18}$$

إن المعادلات (4.6)−(4.5) و(4.13)−(4.11) مرتبطة ليس فقط عبر الشروط الحدية والابتدائية (4.16)−(4.15)، وإنما أيضاً من خلال ظهور الدوران التقليدي: $\varphi_3^0 = \frac{1}{2} \in_{\alpha\beta} u^0_{\beta,\alpha}$ أمام المؤثر: $2(\gamma+\varepsilon)(c_4^{-2} - \hat{c}_2^{-2})\,\partial_t^2$، في المعادلة (4.12).

<u>*آلية حل المسألة:*</u> تتلخص آلية حل المسألة (3.11)−(3.1) بالخطوات الثلاث التالية:

أولاً: بحل مسألة القيم الحدية والابتدائية،التقليدية، نحصل على الإزاحات التقليدية u^0_α والحقل الحراري التقليدي θ^0. باستخدام العلاقات $(4.17)_{1,2}$ نحصل على الدوران التقليدي φ_3^0 وعلى انفعال العزم التقليدية $\kappa^0_{\alpha 3}$. باستخدام العلاقة $(4.17)_3$ نحصل على انفعالات العزم التقليدية $\mu^0_{\alpha 3}$. أما باستخدام $(4.17)_4$و(4.18) فنحصل،على الترتيب، على كل من m_3^0 و $f_3^{\,0}$ و g_3^0. أما باستخدام العلاقات الهندسية $(3.7)_1$ ، مكتوبةً بالنسبة للإزاحات التقليدية u^0_α والانفعالات التقليدية $\varepsilon^0_{\alpha\beta}$، نحصل على الانفعالات التقليدية $\varepsilon^0_{\alpha\beta}$. وباستخدام العلاقة $(3.8)_1$ ، مكتوبةً بالنسبة للانفعالات التقليدية $\varepsilon^0_{\alpha\beta}$ والحقل الحراري التقليدي θ^0 والإجهادات التقليدية $\sigma^0_{\alpha\beta}$، نحصل على الإجهادات التقليدية $\sigma^0_{\alpha\beta}$.

ثانياً: وبحل مسألة القيم الحدية الابتدائية المتممة (4.16)−(4.11)، نحصل على الحل المتمم: $u'_\alpha \,,\, \varphi'_3 \,,\, \theta'$. باستخدام العلاقات الهندسية (3.7) مكتوبةً بالنسبة للإزاحات المتممة u'_α والدوران المتمم φ'_3 والانفعالات المتممة $\gamma'_{\alpha\beta}$ و $\kappa'_{\alpha 3}$ ، فإننا نحصل على الانفعالات المتممة المذكورة. وباستخدام العلاقات التأسيسية (3.8) ، مكتوبةً بالنسبة للانفعالات المتممة $\gamma'_{\alpha\beta}$ و $\kappa'_{\alpha 3}$ والحقل الحراري المتمم θ'، و الإجهادات المتممة $\sigma'_{\alpha\beta}$ و $\mu'_{\alpha 3}$ ، فإننا نحصل على الإجهادات المتممة $\sigma'_{\alpha\beta}$ و $\mu'_{\alpha 3}$.

ثالثاً: بعد الحصول على جميع الحقول الفيزيائية التقليدية والمتممة ، نعوض في:

$$\begin{aligned} & u_\alpha = u_\alpha^0 + u'_\alpha \ , \quad \varphi_3 = \varphi_3^0 + \varphi'_3 \ , \quad \theta = \theta^0 + \theta' \ , \\ & \gamma_{\alpha\beta} = \varepsilon^0_{\alpha\beta} + \gamma'_{\alpha\beta} \ , \quad \kappa_{\alpha 3} = \kappa^0_{\alpha 3} + \kappa'_{\alpha 3} \ , \\ & \sigma_{\alpha\beta} = \sigma^0_{\alpha\beta} + \sigma'_{\alpha\beta} \ , \quad \mu_{\alpha 3} = \mu^0_{\alpha 3} + \mu'_{\alpha 3} \end{aligned} \tag{4.19}$$

ونستخدم العلاقة (3.4)، فنحصل على الحل $(\mathbf{u}\ ,\ \boldsymbol{\varphi}\ ,\ \theta,\ \boldsymbol{\sigma}\ ,\ \boldsymbol{\mu}\ ,\ \boldsymbol{\gamma}\ ,\ \boldsymbol{\kappa})$ لمسألة القيم الحدية والابتدائية $(3.11)-(3.1)$.

فيمايلي سنستنتج النظام المعادلاتي الاشتقاقي الجزئي لأجل المقاطع: $u'_\alpha\ ,\ \varphi'_3\ ,\theta'$ ، والذي لايحتوي الدوران التقليدي φ_3^0. ولهذا الغرض نطبق المؤثر $\overset{*}{\square}_2$ على طرفي المعادلة (4.3)، فنحصل على المعادلة التالية المحققة في $\Omega \times \mathrm{T}^+$:

$$\overset{*}{\square}_2 (\overset{*}{\square}_4 \in_{\alpha\beta} u_{\beta,\alpha} + 2Y_3 - 2\,\square_4 \zeta_3) = 0 \tag{4.20}$$

الآن عن المعادلة (4.20) ، لأجل $(\zeta_3^0 = 0$ و $Y_3^0 = 0)$ ، تنفصل أو تخرج المعادلة التالية، المحققة في $\Omega \times (0,\infty)$:

$$\overset{*}{\square}_4 (2\overset{*}{\square}_2 \varphi_3^0 + \in_{\alpha\beta} X_{\beta,\alpha}) = 0 \tag{4.21}$$

والمحققة على التطابق في $\Omega \times \mathrm{T}^+$، وينتج ذلك من تحقق المعادلة (4.9) في $\Omega \times \mathrm{T}^+$.

الآن، ينتج من المعادلات (4.2) و (4.20) ومعادلة التوصيل الحراري(3.14)، أن جملة المعادلات التالية محققة في $\Omega \times \mathrm{T}^+$، لأجل $u'_\alpha\ ,\ \zeta_3\ ,\theta'$:

$$\overset{*}{\square}_2 u'_\alpha + (\lambda+\mu) u'_{\beta,\beta\alpha} - \nu_T\, \theta'_{,\alpha} + \hat{X}_\alpha = 2\alpha \in_{\alpha\gamma} \zeta_{3,\gamma}\ , \tag{4.22}$$

$$\overset{*}{\square}_2 (\overset{*}{\square}_4 \in_{\alpha\beta} u'_{\beta,\alpha} - 2\,\square_4 \zeta_3) + 2\hat{Y}_3 = 0\ , \tag{4.23}$$

$$\mathrm{D}\,\theta' - \eta_0 \dot{u}'_{\varepsilon,\varepsilon} = -\frac{\hat{Q}}{\kappa} \tag{4.24}$$

حيث:

$$\hat{Y}_3 = \overset{*}{\square}_2 Y_3 - \frac{1}{2}\overset{*}{\square}_4 \in_{\alpha\beta} X_{\beta,\alpha} \qquad (4.25)$$

ولنلاحظ هنا اختفاء الدوران التقليدي φ_3^0 من جملة المعادلات السابقة. أخيراً باستخدام العلاقة:

$$\zeta_3 = \frac{1}{2}\in_{\alpha\beta} u'_{\beta,\alpha} - \varphi'_3 \qquad (4.26)$$

تأخذ جملة المعادلات (4.24)−(4.22) الشكل التالي في $\Omega \times T^+$، لأجل $u'_\alpha\ ,\ \varphi'_3\ ,\ \theta'$:

$$\square_2 u'_\alpha + (\lambda + \mu - \alpha) u'_{\beta,\beta\alpha} + 2\alpha \in_{\alpha\gamma} \varphi'_{3,\gamma} - \nu_T\, \theta'_{,\alpha} + \hat{X}_\alpha = 0 \qquad (4.27)$$

$$\overset{*}{\square}_2 \left(\square_4 \varphi'_3 + 2\alpha \in_{\alpha\beta} u'_{\beta,\alpha} \right) + \hat{Y}_3 = 0 \qquad (4.28)$$

$$D\,\theta' - \eta_0 \dot{u}'_{\varepsilon,\varepsilon} = -\frac{\hat{Q}}{\kappa} \qquad (4.29)$$

إلى جملة المعادلات السابقة نضيف الشروط الحدية والابتدائية (4.16)−(4.15).

5. الاستنتاجات والمقترحات:

أولاً) الاستنتاجات: في البحث عممنا طريقة متجه تشيفر المستخدمة في [4] إلى حل مسألة لامي للقيم الحدية والابتدائية للجسم 2D(E−N:6)، المتجانس والمتماثل المناحي، والخاضع لحرارة، ضمن الحالة المستوية الأولى للانفعالات المرنة، حيث يشغل الجسم في لحظة البدء المنطقة بسيطة الترابط Ω في المتنوعة الاقليدية ثنائية البعد R^2، وتكمن أهمية ذلك بأن المسألة الأصلية تؤول إلى مجموع مسألتين حلهما أسهل من حل المسألة الأصلية.

ثانياً) المقترحات: يمكن أن نختتم هذا البحث بمسائل للمناقشة، هي الآتية:

مسألة1: إعادة نفس الدراسة لأجل الوصف التقليدي العام ضمن الحالة المستوية الثانية (الحالة المستوية العكسية) للانفعالات المرنة للجسم.

مسألة2: تعميم طريقة Papkovich-Neuber إلى حل مسألتي الحالة المستوية الأولى والثانية للانفعالات المرنة للجسم 2D(E−N:6)، المتجانس والمتماثل المناحي، والخاضع لحرارة، حيث الجسم يشغل في لحظة البدء المنطقة Ω بسيطة الترابط في R^2.

مسألة3: إعادة ماتقدم ذكره إلى المسألتين الأولى والثانية للانفعالات اللدنة.

المراجع

[1] – Eringen , A . C , **1966** - *Linear theory of micropolar elasticity*, J.Math. Mech., 15 , 909 – 930.

[2] –Nowacki, W , **1986** - Theory of Asymmetric Elasticity , Warsaw , PWN.

[3]- Dyszlewicz , J, **2004** - Micropolar Theory of Elasticity , in : Series Lectures. Notes in Applied and Computational Mechanics, Vol.15, 356 p, Springer .

[4]-Dyszlewicz J., **1973** - *A method of solving static problems of linear asymmetric elasticity*,Mech. Teor. Stos., **11,2,143158** (in Polish).

[5]-Dyszlewicz J., Matysiak S., **1973**- *Singularity of stresses in micropolar elastic semispace due to discontinuous boundary load*, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci.Techn., 21, 12, 605-610.

[6]–Dyszlewicz , J ,1996 - *Selected problems of linear asymmetrical thermoelasticity*, Journal of Thermal Stresesses,19, 185-206.

[7]-Dyszlewicz , J ,1986-*Fundamental solutions of micropolar elastoststics* , Bull. Pol. Ac.: Tech. , I-1986 , 34 , 179-190 ; II-1986 , 34 , 191-202.