شروط Sommerfeld المقاربية لكمونات Nowacki المتوافقة مع الحالة الديناميكية لجسم Koiter-Mindlin الخاضع لحمول حجمية متغيرة توافقياً مع الزمن

أ.د.منتجب الحسن† حسام شقوف ‡

ملخص البحث:

المسألة قيد الدراسة هي مسألة كمونات Nowacki للجسم المرن المتجانس (Homogeneous) والمتماثل المناحي (Isotropic)، والمتساوي درجات الحرارة (Isothermal)، والمؤلف من نقاط مادية موجهة (Oriented Material Points)، وذي تشوهات مرنة صغيرة (Infinitesimal elastic Strains)، ذلك ضمن نظرية العزوم المعدّلة. وضع الأساس الرياضي لمثل هذا الجسم كلاً من الباحثين: Koiter [1] و Mindlin [2,3]، والذي سمي فيما بعد باسمهما ورًمز له اختصاراً بالرمز (K–M).
في البداية، سنعرض كلاً من معادلات Lame غير المتجانسة ومعادلات كمونات Nowacki الموافقة ، ذلك لأجل الجسم (K–M) ، الذي يشغل في لحظة البدء، منطقة ثنائية الترابط ومحدودة في الفضاء الإقليدي R^3. بعدها، سنعرض المعادلات الناتجة عن معادلات Lame، وعن معادلات كمونات Nowacki الموافقة لها، لأجل سعات الإزاحات وسعات كمونات Nowacki، الموافقة، وذلك في الحالة التي تتغير فيها كلاً من الإزاحات وكمونات Nowacki ، الموافقة، توافقياً مع الزمن. وبعد عرض مبرهنتين هامتين، تزودانا بتحويلات تكاملية، سطحية–حجمية، لأجل مؤثري Helmholtz التفاضليين المضاعفين من المرتبتين الأولى والثانية ، سنستنتج التمثيلات التكاملية، لحلول معادلات كمونات Nowacki على شكل تكاملات سطحية ،على حدود المنطقة ثنائية الترابط التي يشغلها جزء من الجسم في

† أستاذ في قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة البعث.

‡ طالب دكتوراه في قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة البعث.

الكلمات المفتاحية: شروط Sommerfeld المقاربية لكمونات Nowacki ، مسألة Lame للجسم المرن، المؤلف من نقاط مادية موجهة، من نوع Koiter-Mindlin بوجود حمول حجمية غير معدومة.

لحظة البدء.ومن ثم، سنناقش الشروط المقاربية، من نوع Sommerfeld، للحلول السابقة (الموافقة لوجود حمول حجمية)، ذلك عندما تتباعد الحدود الخارجية للمنطقة، إلى اللانهاية.

The Sommerfeld asymptotic conditions for Nowacki's potentials corresponding to the solution for the Koiter-Mindlin elastic body with no vanishing body loads harmonically varying in time

Dr.Mountajab Al-Hasan † & **Husam Shakkouf ‡**

Abstract

The considerable problem is the Nowacki's potential one for the homogeneous, isotropic, and isothermal dynamic elastic body consisting of oriented material points, and of infinitesimal elastic strains in the fame of the couple stress theory. The mathematical foundations of this theory are established by the tow researchers ; Koiter [1], and Mindlin [2,3], so the body in the frame of this theory called (K-M) model. First, we introduce the Lame equations, and the related Nowacki's potential ones for the (K-M) elastic body, which initial configuration is a bounded, tow-order connected region in R^3 .Next, we write the resulting equations from Lame equations, and from its related Nowacki's potential ones, for the displacement amplitudes and Nowacki's potentials amplitudes, in the case when the displacements and related Nowacki's potentals varying harmonically in time. Then, after demonstrating 2 important theorems, that give volume-surface integral transforms for the first and second order, Helmholtz differential operators, we derive an integral representations for the Nowacki's potentials related to the nonhomogeneous Lame equations, all these in form of surface integrals on the boundary of the tow-order connected region, occupied by a part of the body, in the initial moment. Finally, we study the asymptotic

† Professor At Department of Mathematics – Faculty of Science – Al–Baath University.
‡ Ph.D. Student in Department of Mathematics–Faculty of Science–Al–Baath University.

Key words: The Sommerfeld asymptotic conditions for the Nowacki's Potentials, the Lame's problem for the Koiter-Mindlin elastic body consisting of oriented material points, with no vanishing body loads.

conditions of Sommerfeld type for the above mentioned potentials (which relate to the nonzero body loads), in the case when the external surface of the tow-order connected region tends to infinity.

1. مقدمة :

ناقش العديد من الباحثين الرياضيين ، مثل Ignaczak و Nowacki (1962) و Kupradse (1963) ، ناقشوا مايسمى بالشروط المقاربية من نوع Sommerfeld من أجل معادلات كمونات Nowacki ، المتجانسة، بشكل Nowacki، في المرونة الخطية، التقليدية، المتجانسة، المتماثلة المناحي، والمتساوية درجات الحرارة، وفي المرونة الخطية، المتجانسة، المتماثلة المناحي، والمترابطة مع حقل حرارة. كل ذلك لأجل حالة عدم وجود حمول حجمية. بعدها درس Ignaczak (1970) و (1972) الشروط المقاربية من نمط Sommerfeld من أجل معادلات كمونات Nowacki، المتجانسة، بشكلي Nowacki و Ignaczak، وذلك ضمن المرونة الخطية، دقيقة الاستقطاب، والمتجانسة، والمتماثلة المناحي، ومركزية التناظر، ومتساوية دراجات الحرارة. أيضاً، كان ذلك من أجل حالة الحمول الحجمية، المعدومة. وبعدها درس Al–Hasan و Dyszlewicz ما بين العامين (2001) و(2004)، درسوا الشروط المقاربية لأجل معادلات كمونات Nowacki، المتجانسة، بشكل Ignaczak، وذلك ضمن المرونة الخطية، دقيقة الاستقطاب، والمتجانسة، متماثلة المناحي، ومركزية التناظر، والمترابطة مع حقل حراري. وما سبق كان من أجل حالة عدم وجود حمول حجمية، وعدم وجود مصادر حرارية. وفي عام (2014) درست الباحثة Kazem، الشروط المقاربية من نمط Sommerfeld لأجل معادلات كمونات Nowacki ، بوجود حمول حجمية غير معدومة، ذلك ضمن المرونة الخطية، التقليدية، المتجانسة، المتماثلة المناحي، والمتساوية درجات الحرارة. أخيراً في عام (2016) ، درس الباحثان Shakkouf وAl–Hasan ، شروط Sommerfeld المقاربية للإزاحات مباشرةً، في جسم Hooke الخاضع لحمول حجمية، متغيرة توافقياً مع الزمن.

2. هدف البحث:

يهدف البحث إلى استنتاج تلك الشروط المقاربية من نمط Sommerfeld لأجل كمونات Nowacki، للجسم المرن (K-M)، والتي تسمح بتمثيل هذه الكمونات على شكل تكاملات

سطحية على سطح منطقة بسيطة الترابط، وغير محدودة، يشغلها الجسم المرن (K-M) في لحظة البدء، علماً بأن الجسم يخضع لحمول حجمية غير معدومة، تتغير توافقياً مع الزمن.

3. طرق لبحث:

سنستنتج فيما يلي، شروط Sommerfeld المقاربية لأجل كمونات Nowacki للجسم المرن (K–M) مع التمثيلات التكاملية السطحية المناسبة،المذكورة ،بإتباع طريقة هي تعميم الطريقة المستخدمة في[5] و[6] و[10] و[12] و[13] ، ومستخدمين في ذلك مبرهنتين مساعدتين، هامتين، تتعلقان بمؤثري Helmholtz الاشتقاقيين، من المرتبين الأولى والثانية [7,6].

ولهذا الغرض، نعتبر الجسم المرن المؤلف من نقاط مادية موَّجهة، وذي التشوهات الصغيرة والمتجانس والمتماثل المناحي، والمتساوي درجات الحرارة، والذي له ثلاث درجات حرية وأربعة ثوابت مادية: $\mu > 0$ و $\lambda > 0$ و $\ell^* \geq 0$ و η (حيث: $1 > |\eta|$)، والمدروس من قبل الباحثين Koiter [1] و Mindlin [2,3] ، والذي نرمز له اختصاراً بـ (K–M). ولأجل هذا الجسم سنفترض أن الحالة البدئية Ω للجسم هي المنطقة وحيدة الترابط، وغير المحدودة، التالية من الفضاء الإقليدي ثلاثي البعد R^3: $\Omega := R^3 - N(O\,,\,a)$،حيث: $N(O\,,\,a)$ هي الكرة المفتوحة في R^3، التي مركزها O، ونصف قطرها a. كما سنفترض أيضاً أن كافة الحقول الفيزيائية التي تصف الحالة الديناميكية للجسم المرن (K–M)، هي دوال حقيقية ملساء بالقدر الكافي، تتبع لمتحولات نقاط Ω وتتبع للزمن t أيضاً. من أجل متطلبات البحث، سعرض فيمايلي معادلات Lame للجسم المرن (K–M)، ومعادلات كمونات Nowacki الموافقة لها ([17]).

أ) إن معادلات Lame للجسم المرن (K–M)، هي جملة المعادلات الاشتقاقية الجزئية التالية، المحققة في $\Omega^\circ \times]0,\infty[$ (حيث: Ω° هي داخلية Ω) :

$$\mu u^*_{i\,,\,j\,j} + (\mu+\lambda)\, u^*_{j\,,\,j\,i} + \mu\,\ell^{*2} \in_{i\,j\,k} \in_{k\,n\,p} u^*_{p\,,\,n\,j\,s\,s} + \\ + F_i^* = \rho \ddot{u}_i^* \tag{3.1}$$

حيث:

$$F_i^* = X_i^* + \frac{1}{2} \in_{i\,j\,k} Y^*_{k\,,\,j} \tag{3.2}$$

حيـــث $\vec{u}^{\,*} \equiv (u_1^*, u_2^*, u_3^*)$ و $\vec{X}^{\,*} \equiv (X_1^*, X_2^*, X_3^*)$ و $\vec{Y}^{\,*} \equiv (Y_1^*, Y_2^*, Y_3^*)$ على الترتيب، تمثل المركبات الديكارتية في النظام الإحداثي الديكارتي $O x_1 x_2 x_3$، لكلٍ من متجه الإزاحة $\vec{u}^{\,*}$ لنقطة مادية لاغرانجية $\boldsymbol{x} \equiv (x_1, x_2, x_3)$ من الجسم المرن (K–M)، ولمتجـه القـوة الحجميـة $\vec{X}^{\,*}$، ولمتجـه العـزم الحجمـي $\vec{Y}^{\,*}$، فـي هـذه النقطـة الماديـة اللاغرانجيـة. كما أن: $\in_{i\,j\,k}$ هـي المركبـات فـي النظـام الاحـداثي الـديكارتي المعتبـر، لنصـف تنسـور Levi-Civita، و $\rho > 0$ هـي الكثافـة الحجميـة للجسم (وهـي كميـة ثابتـة لأن الجسم متجـانس)، كمـا أن الأدلـة اللاتينيـة .... $i\ ,\ j\ , k\ ,$ تأخذ القيم $1\ ,\ 2\ ,\ 3$ ، حيث سنستخدم رموز Einstein (اتفاقية الجمع على الأدلة المكررة). كما أن النقطة تدل على المشتق الجزئي بالنسبة للزمن و $\partial_t := \dfrac{\partial}{\partial t}$ و $\partial_t^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}$.

مـن أجـل متطلبـات هـذا البحـث، سنكتب فيمـايلي معـادلات Lame (3.1)، بدلالـة المـــؤثر الاشــــتقاقي الـــديناميكي: $\square_0 := \left(\ell^{*2} \nabla^2 - 1 \right) \nabla^2 + \dfrac{1}{\hat{c}_2^2} \partial_t^2$ ، حيـــث: $\hat{c}_2 := \sqrt{\dfrac{\mu}{\rho}}$ ، و ∇^2 يمثل مؤثر Laplace الاشتقاقي السلمي ثلاثي الأبعاد، الذي يعطى في النظام الاحداثي الديكارتي المعتبر بالعلاقة: $\nabla^2(\cdots) = \dfrac{\partial}{\partial x_i} \dfrac{\partial}{\partial x_i}(\cdots) = (\cdots)_{,\,i\,i}$.

بما أن:

$$\in_{i\,j\,k} \in_{k\,n\,p} = \delta_{j\,p}\ \delta_{i\,n} - \delta_{j\,n}\ \delta_{i\,p} \tag{3.3}$$

فتأخذ بذلك المعادلة (3.1) الشكل التالي في $\Omega^\circ \times\,]\,0, \infty[$:

$$\begin{aligned} &\mu u^*_{i\,,\,j\,j} + (\mu + \lambda)\, u^*_{j\,,\,j\,i} + \mu\, \ell^{*2} \,(u^*_{j\,,\,j\,i\,s\,s} - u^*_{i\,,\,j\,j\,s\,s}) + \\ &+ F_i^* = \rho \ddot{u}_i^* \end{aligned} \tag{3.4}$$

أو:

$$\begin{aligned} &(\mu \nabla^2 u_i^* - \mu\, \ell^{*2}\, \nabla^2 \nabla^2 u_i^* - \rho \ddot{u}_i^*) + \\ &+ \left[(\mu + \lambda)\, u^*_{j\,,\,j\,i} + \mu\, \ell^{*2}\, \nabla^2 u^*_{j\,,\,j\,i} \right] + F_i^* = 0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

وبالتبسيط والاختصار، نحصل على المعادلة الاشتقاقية التالية، في $\Omega^\circ \times]0,\infty[$:

$$-\mu\Box_0 u_i^* - \mu\left(\frac{1}{2\nu-1} - \ell^{*2}\nabla^2\right)u_{j,ji}^* + F_i^* = 0 \qquad (3.6)$$

بالتالي نحصل على المعادلة الاشتقاقية التالية، المحققة في $\Omega^\circ \times]0,\infty[$:

$$\Box_0 u_i^* + \left(\frac{1}{2\nu-1} - \ell^{*2}\nabla^2\right)u_{j,ji}^* - \frac{1}{\mu}F_i^* = 0 \qquad (3.7)$$

حيث: $\nu := \dfrac{\lambda}{2(\mu+\lambda)}$ هي نسبة Poisson.

ب) معادلات كمونات Nowacki للجسم المرن (K–M):

وفقاً لمبرهنة Stokes − Helmholtz، كتب Nowacki، الازاحات u_i^* والحمول الحجمية F_i^* بالشكل التالي في $\Omega^\circ \times]0,\infty[$:

$$u_i^* = \Phi_{,i}^* + \epsilon_{ijk}\,\psi_{k,j}^* \quad , \text{ such that } \psi_{k,k}^* \qquad (3.8)$$

$$F_i^* = \rho\left(\upsilon_{,i}^* + \epsilon_{ijk}\,\chi_{k,j}^*\right), \text{ such that } \chi_{k,k}^* \qquad (3.9)$$

حيث: Φ^* و $\vec{\psi}^* \equiv (\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*)$ ، على الترتيب، هما كمونا Nowacki المجهولين، السلمي والمتجهي، كما أن: υ^* و $\vec{\chi}^* \equiv (\chi_1^*, \chi_2^*, \chi_3^*)$ ، على الترتيب، هما كمونا Nowacki المعلومين، السلمي والمتجهي. أخيراً ندعو الجزء $\Phi_{,i}^*$ (الجزء $\rho\upsilon_{,i}^*$) بالجزء الكموني لـ u_i^* (لـ F_i^*)، كما ندعو الجزء $\epsilon_{ijk}\,\psi_{k,j}^*$ (الجزء $\rho\epsilon_{ijk}\,\chi_{k,j}^*$)، بالجزء الدوّار لـ u_i^* (لـ F_i^*). لإيجاد معادلات الحقل الاشتقاقية بتوابع كمون Nowacki، المجهولة: $\vec{\psi}$ و Φ ، وفقاً لطريقة كموناتNowacki، نعوض (3.8) و (3.9) في معادلات Lame (3.7)، فنحصل على المعادلة الاشتقاقية التالية المحققة في $\Omega^\circ \times]0,\infty[$:

$$\Box_0\left(\Phi_{,i}^* + \epsilon_{ijk}\,\psi_{k,j}^*\right) + \left(\frac{1}{2\nu-1} - \ell^{*2}\nabla^2\right)\left(\nabla^2\Phi_{,i}^* + 0\right) - \frac{1}{\hat{c}_2^2}\left(\upsilon_{,i}^* + \epsilon_{ijk}\,\chi_{k,j}^*\right) = 0 \qquad (3.10)$$

أو:

$$\left\{\left[\square_0 + \left(\frac{1}{2\nu-1} - \ell^{*2}\nabla^2\right)\nabla^2\right]\Phi^* - \frac{1}{\hat{c}_2^2}\upsilon^*\right\}_{,i} + \\ + \in_{ijk}\left(\square_0\,\psi_k^* - \frac{1}{\hat{c}_2^2}\chi_k^*\right)_{,j} = 0 \qquad (3.11)$$

وبما أن:

$$\square_0 + \left(\frac{1}{2\nu-1} - \ell^{*2}\nabla^2\right)\nabla^2 = -\frac{1}{\mu}\square_1$$

حيث: $\square_1 := (\lambda+2\mu)\nabla^2 - \rho\,\partial_t^2$ ، فتأخذ المعادلة السابقة الشكل التالي في $\Omega^\circ \times]0,\infty[$:

$$\left(\square_1\,\Phi^* + \rho\,\upsilon^*\right)_{,i} + \\ + \in_{ijk}\left[-\mu\left(\square_0\,\psi_k^* - \frac{1}{\hat{c}_2^2}\chi_k^*\right)\right]_{,j} = 0 \qquad (3.12)$$

الآن، وفقاً لـ Nowacki ، فإن (3.12) تكون محققة ، إذا حققت كمونات Nowacki : $\vec{\psi}$ و Φ، معادلات الحقل التالية في $\Omega^\circ \times]0,\infty[$:

$$\square_1\,\Phi^* + \rho\,\upsilon^* = 0\,, \\ \square_0\,\psi_k^* - \frac{1}{\hat{c}_2^2}\chi_k^* = 0 \qquad (3.13)$$

ندعوا المعادلتين (3.13) بمعادلتي كمونات Nowacki للجسم المرن (K–M) ، المتجانس والمتماثل المناحي والمتساوي درجات الحرارة، والذي يشغل في لحظة البدء، المنطقة بسيطة الترابط وغير المحدودة Ω°.

ج) المعادلات الناتجة عن معادلات Lame ، وعن معادلات كمونات Nowacki ، للجسم المرن المدروس (K–M)، عندما تتغير الحقول الفيزيائية، توافقاً مع الزمن– حالة الحمول الحجمية غير المعدومة:

في هذه الفقرة سنفترض أن حقلي الإزاحات، والحمول الحجمية، المتجهيين، و كذلك كمونات Nowacki المجهولة والمعلومة، المتجهية والسلمية، جميعها تتغيير مع الزمن توافقاً بتردد ω، وفقاً لمايلي:

$$u_i^* = u_i \cos\omega t \quad , \quad X_i^* = X_i \cos\omega t \tag{3.14}$$

$$Y_i^* = Y_i \cos\omega t \quad , \quad F_i^* = F_i \cos\omega t \tag{3.15}$$

$$\Phi^* = \Phi \cos\omega t \quad , \quad \psi_i^* = \psi_i \cos\omega t \tag{3.16}$$

$$\upsilon^* = \upsilon \cos\omega t \quad , \quad \chi_i^* = \chi_i \cos\omega t \tag{3.17}$$

حيث:

$$\vec{u} \equiv (u_1 , u_2 , u_3) \ , \ \vec{X} \equiv (X_1 , X_2 , X_3) \tag{3.18}$$

$$\vec{Y} \equiv (Y_1 , Y_2 , Y_3) \ , \ \vec{F} \equiv (F_1 , F_2 , F_3) \tag{3.19}$$

$$\vec{\psi} \equiv (\psi_1, \psi_2 , \psi_3) \ , \ \vec{\chi} \equiv (\chi_1, \chi_2 , \chi_3) \tag{3.20}$$

وللحصول، الآن، على المعادلات المطلوبة، نعوض (3.17)-(3.14) في معادلات Lame (3.7)، وفي معادلات كمونات Nowacki (3.13) ، فنحصل بعد الاختصار، على المعادلات التالية المحققة في Ω°:

$$\begin{aligned} &\left[\left(\ell^{*2}\nabla^2 - 1\right)\nabla^2 - \frac{\omega^2}{\hat{c}_2^2}\right]u_i + \\ &+ \left(\frac{1}{2\nu-1} - \ell^{*2}\nabla^2\right)u_{j,ji} - \frac{1}{\mu}F_i = 0 \ , \end{aligned} \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned} &\left[(\lambda+2\mu)\nabla^2 + \rho\omega^2\right]\Phi + \rho\upsilon = 0 \ , \\ &\left[\left(\ell^{*2}\nabla^2 - 1\right)\nabla^2 - \frac{\omega^2}{\hat{c}_2^2}\right]\psi_k - \frac{1}{\hat{c}_2^2}\chi_k = 0 \end{aligned} \tag{3.22}$$

فإذا رمزنا بـ $c_1 = \sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho}$ ، و بـ $\sigma_1 = \omega / c_1$ و $\hat{\sigma}_2 = \omega / \hat{c}_2$، فتأخذ المعادلات (3.21) و (3.22) الشكل التالي في Ω°:

$$\begin{aligned} &\left[\left(\nabla^2 - \ell^{*-2}\right)\nabla^2 - \ell^{*-2}\hat{\sigma}_2^2\right]u_i + \\ &+ \left(\frac{\ell^{*-2}}{2\nu-1} - \nabla^2\right)u_{j,ji} - \frac{\ell^{*-2}}{\mu}F_i = 0 \ , \end{aligned} \tag{3.23}$$

$$\left(\nabla^2 + \sigma_1^2\right)\Phi + \frac{\upsilon}{c_1^2} = 0 \;,$$
$$\left[\left(\nabla^2 - \ell^{*-2}\right)\nabla^2 - \ell^{*-2}\,\hat{\sigma}_2^2\right]\psi_k - \frac{\ell^{*-2}}{\hat{c}_2^2}\chi_k = 0 \qquad (3.24)$$

وإذا فرضنا، الآن أن:

$$\left(\nabla^2 - \ell^{*-2}\right)\nabla^2 - \ell^{*-2}\,\hat{\sigma}_2^2 = \left(\nabla^2 + \lambda_1^{*2}\right)\left(\nabla^2 + \lambda_2^{*2}\right) \;,$$
$$\lambda_3^{*2} := -\frac{\ell^{*-2}}{2\nu - 1} \qquad (3.25)$$

فيكون:

$$\lambda_1^{*2} + \lambda_2^{*2} = -\ell^{*-2} < 0 \;, \quad \lambda_1^{*2}\,\lambda_2^{*2} = -\ell^{*-2}\,\hat{\sigma}_2^2 < 0 \;, \qquad (3.26)$$
$$\lambda_3^{*2} > 0$$

و:

$$\lambda_1^{*2} = \frac{\ell^{*-2}}{2}\left(-1 + \sqrt{1 + 4\ell^{*2}\,\hat{\sigma}_2^2}\right) > 0 \;,$$
$$\lambda_2^{*2} = -\frac{\ell^{*-2}}{2}\left(1 + \sqrt{1 + 4\ell^{*2}\,\hat{\sigma}_2^2}\right) < 0 \qquad (3.27)$$

وعندئذٍ إذا رمزنا بـ $\square_c^2 = \nabla^2 + c^2$، حيث هنا c أي عدد حقيقي أو عقدي، فتأخذ عندئذٍ المعادلات (3.23) و(3.24) الشكل التالي في Ω°:

$$\square_{\lambda_1^*}^2\,\square_{\lambda_2^*}^2 u_i - \square_{\lambda_3^*}^2\, u_{j,ji} = \frac{\ell^{*-2}}{\mu} F_i \;, \qquad (3.28)$$

$$\square_{\sigma_1}^2\,\Phi = -\frac{\upsilon}{c_1^2} \;,$$
$$\square_{\lambda_1^*}^2\,\square_{\lambda_2^*}^2\,\psi_k = \frac{\ell^{*-2}}{\hat{c}_2^2}\chi_k \qquad (3.29)$$

أو تأخذ الشكل التالي في Ω° :

$$\square_{\lambda_1^*}^2\,\square_{\lambda_2^*}^2 u_i - \square_{\lambda_3^*}^2\, u_{j,ji} = -A_i \;, \qquad (3.30)$$

$$\begin{aligned} \square^2_{\sigma_1}\, \Phi &= -B \,, \\ \square^2_{\lambda_1^*}\, \square^2_{\lambda_2^*}\, \psi_i &= -E_i \end{aligned} \qquad (3.31)$$

حيث: $A_i = -\dfrac{\ell^{*-2}}{\mu} F_i \quad , \quad B = \dfrac{\upsilon}{c_1^2} \quad , \quad E_i = -\dfrac{\ell^{*-2}}{\hat{c}_2^2}\chi_i$

قبل الدخول في الفقرة القادمة، تلزمنا المبرهنتان التاليتان، اللتان تعطيانا تحويلان حجميان−سطحيان، لأجل مؤثري Helmholtz، الاشتقاقيين المضاعفين من المرتبتين الأولى والثانية، في منطقة ثنائية الترابط، يشغلها جزء من الجسم في لحظة البدء، (انظر [7,6,5,9,14]). لهذا الغرض، سنرمز بـ S_a لسطح الكرة $N(O\,,\,a)$ ، ولنأخذ $\xi \in \Omega$ نقطة مادية لاغرانجية، كيفية، تقع خارج S_a ، ولنختار r كبير بالقدر الكافي، بحيث أن الكرة المفتوحة $N(\xi\,,\,r)$ ، التي مركزها ξ، ونصف قطرها r ، تحوي على الكرة المفتوحة $N(O\,,\,a)$ ، ولنرمز بـ S_r لسطح الكرة المفتوحة $N(\xi\,,\,r)$ ، وبـ Ω_r للمنطقة ثنائية الترابط في R^3 ، والمحدودة ما بين السطحين S_a و S_r ، والتي يشغلها جزء من الجسم المرن (K−M) في لحظة البدء. وفيما يلي، ومن أجل متطلبات هذا البحث، نعرض المبرهنتين التاليتين، في المنطقة ثنائية الترابط Ω_r ([7,6,5,9,14]).

<u>مبرهنة مساعدة I</u> :

لنفرض أن الدوال الحقيقية U و V ملساء بالقدر الكافي في $\overline{\Omega}_r$ ($\overline{\Omega}_r = S_a \cup \Omega_r \cup S_r$)، عندئذٍ تتحقق كلٍ من المتطابقات التكاملية التالية [7,6]:

$$\int_{\Omega_r} [\, U(\mathbf{x})\, \square^2_{C_3} V(\mathbf{x}) - V(\mathbf{x})\, \square^2_{C_3} U(\mathbf{x}) \,]\, d\,\Omega(\mathbf{x}) =$$

$$= \Big(\int_{S_a} + \int_{S_r} \Big) [\, U(\mathbf{x})\, \frac{\partial V}{\partial n}(\mathbf{x}) - V(\mathbf{x})\, \frac{\partial U}{\partial n}(\mathbf{x}) \,]\, d\,S(\mathbf{x}) \,, \qquad (3.32)$$

$$\int_{\Omega_r} [U(\mathbf{x}) \square^2_{C_1} \square^2_{C_2} V(\mathbf{x}) - V(\mathbf{x}) \square^2_{C_1} \square^2_{C_2} U(\mathbf{x})] \, d\,\Omega(\mathbf{x})$$

$$= (\int_{S_a} + \int_{S_r}) \{ [\square^2_C U(\mathbf{x})] \frac{\partial V}{\partial n}(\mathbf{x}) - [\square^2_C V(\mathbf{x})] \frac{\partial U}{\partial n}(\mathbf{x}) \quad (3.33)$$

$$+ U(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial n} [\nabla^2 V(\mathbf{x})] - V(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial n} [\nabla^2 U(\mathbf{x})] \} \, d\,S(\mathbf{x})$$

حيث: $d\,\Omega(x) = d\,x_1\,d\,x_2\,d\,x_3$ ، أما $\frac{\partial V}{\partial n}$ فهو مشتق الدالة V وفق متجه واحدة الناظم $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ ، على كلٍ من السطحين S_a و S_r ، والموجَّه نحو داخل S_a (في حال كونه ناظماً لـ S_a)، ونحو خارج S_r (في حال كونه ناظماً لـ S_r)؛ ($\frac{\partial V}{\partial n} = \vec{n} \,.\, \overrightarrow{grad}\, V = n_i \frac{\partial V}{\partial x_i}$). كما أن: C_1 و C_2 و C_3 أي أعداد عقدية، وهنا: $C^2 = C_1^2 + C_2^2$.

<u>مبرهنة مساعدة II</u> :

أولاً : لتكن لدينا معادلة Helmholtz الاشتقاقية، البسيطة التالية المحققة في Ω_r:

$$\square^2_{C_3} U(\mathbf{x}) = -P(\mathbf{x}) \quad (3.34)$$

حيث $U(\mathbf{x})$ الدالة السلمية المجهولة و $P(\mathbf{x})$ دالة سلمية مفروضة. عندئذٍ فإن المعادلة السابقة تكافئ في Ω_r، المعادلة التكاملية التالية [7]:

$$U(\mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_r} P(\mathbf{x}) \frac{e^{i\,C_3 R}}{R} \, d\,\Omega(\mathbf{x}) +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} (\int_{S_a} + \int_{S_r}) [\frac{e^{i\,C_3 R}}{R} \frac{\partial U}{\partial n}(\mathbf{x}) \quad (3.35)$$

$$- U(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial n} (\frac{e^{i\,C_3 R}}{R})] \, d\,S(\mathbf{x})$$

حيث: $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega_r$ و $R = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$.

ثانياً: لتكن لدينا معادلة Helmholtz الاشتقاقية المضاعفة من المرتبة الثانية التالية، المحققة في Ω_r [6]:

$$\Box_{C_1}^2 \Box_{C_2}^2 V(\boldsymbol{x}) = -H(\boldsymbol{x}) \tag{3.36}$$

حيث $V(\mathbf{x})$ دالة سلمية مجهولة و $H(\mathbf{x})$ دالة سلمية معلومة في Ω_r، أما C_1 و C_2 فهما عـددان عقـديان اختياريـان. عندئـذٍ المعادلـة التفاضـلية السـلمية (3.36) تكـافئ المعادلـة التكاملية التالية في Ω_r :

$$\begin{aligned} 4\pi(C_2^2 - C_1^2)V(\mathbf{y}) &= \int_{\Omega_r} \frac{e^{iC_1R} - e^{iC_2R}}{R} H(\mathbf{x})\, d\Omega(\mathbf{x}) + \\ &+ \left(\int_{S_a} + \int_{S_r}\right)\Big\{ \frac{e^{iC_1R} - e^{iC_2R}}{R} \frac{\partial}{\partial n}[\Box_C^2 V(\mathbf{x})] \\ &- [\Box_C^2 V(\mathbf{x})] \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{iC_1R} - e^{iC_2R}}{R} + \\ &+ \frac{C_2^2 e^{iC_2R} - C_1^2 e^{iC_1R}}{R} \frac{\partial V}{\partial n}(\mathbf{x}) \\ &- V(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial n} \frac{C_2^2 e^{iC_2R} - C_1^2 e^{iC_1R}}{R} \Big\}\, dS(\mathbf{x}) \end{aligned} \tag{3.37}$$

حيث: $C^2 = C_1^2 + C_2^2$.

4. النتائج والمناقشة:

أولاً) التمثيلات التكاملية فـي Ω_r ، لكمونات Nowacki للجسم المرن (K-M)، عندما تتغير هذه الكمونات، توافقاً مع الزمن– حالة الحمول الحجمية غير المعدومة.

من أجل إيجـاد هذه التمثيلات التكامليـة المطلوبـة، يكفـي تطبيـق البنـد الأول من المبرهنـة السـابقة علـى معادلـة Helmholtz الاشـتقاقية، البسـيطة$(3.31)_1$، والبنـد الثـاني مـن هـذه المبرهنة على معادلة Helmholtz الاشتقاقية المضاعفة من المرتبـة الثانيـة$(3.31)_2$، في Ω_r.

- فإذا طبقّنا البند الأول من المبرهنة السابقة على معادلة Helmholtz الاشتقاقية، البسيطة $(3.31)_1$، في Ω_r، نحصل على التمثيل التكاملي المكافئ التالي في Ω_r:

$$\Phi(\mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi}\int_{\Omega_r} B(\mathbf{x})\frac{e^{i\sigma_1 R}}{R}\,d\Omega(\mathbf{x}) + \frac{1}{4\pi}\Big(\int_{S_a} + \int_{S_r}\Big)\Big[\frac{e^{i\sigma_1 R}}{R}\frac{\partial\Phi}{\partial n}(\mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial n}\Big(\frac{e^{i\sigma_1 R}}{R}\Big)\Big]\,dS(\mathbf{x}) \tag{4.1}$$

بالتالي، من أجل $\mathbf{y} = \xi$، يصبح لدينا:

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{4\pi}\int_{\Omega_r} B(\mathbf{x})\frac{e^{i\sigma_1 R}}{R}\,d\Omega(\mathbf{x}) + \frac{1}{4\pi}\Big(\int_{S_a} + \int_{S_r}\Big)\Big[\frac{e^{i\sigma_1 R}}{R}\frac{\partial\Phi}{\partial n}(\mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial n}\Big(\frac{e^{i\sigma_1 R}}{R}\Big)\Big]\,dS(\mathbf{x}) \tag{4.2}$$

حيث: $R = |\mathbf{x} - \xi|$؛

- أما إذا طبقّنا البند الثاني من المبرهنة السابقة على معادلة Helmholtz الاشتقاقية، المضاعفة من المرتبة الثانية $(3.31)_2$، في Ω_r، فنحصل على التمثيل التكاملي المكافئ التالي في Ω_r:

$$\begin{aligned}
4\pi(\lambda_2^{*2}-\lambda_1^{*2})\,\psi_i(\mathbf{y}) = &\int_{\Omega_r} \frac{e^{i\lambda_1^* R}-e^{i\lambda_2^* R}}{R}\, E_i(\mathbf{x})\, d\Omega(\mathbf{x}) + \\
&+\Big(\int_{S_a}+\int_{S_r}\Big)\Big\{\frac{e^{i\lambda_1^* R}-e^{i\lambda_2^* R}}{R}\,\frac{\partial}{\partial n}[\,\Box_C^2\,\psi_i(\mathbf{x})\,] \\
&-[\,\Box_C^2\,\psi_i(\mathbf{x})\,]\,\frac{\partial}{\partial n}\,\frac{e^{i\lambda_1^* R}-e^{i\lambda_2^* R}}{R} + \\
&+\frac{\lambda_2^{*2}e^{i\lambda_2^* R}-\lambda_1^{*2}e^{i\lambda_1^* R}}{R}\,\frac{\partial\psi_i}{\partial n}(\mathbf{x}) \\
&-\psi_i(\mathbf{x})\,\frac{\partial}{\partial n}\,\frac{\lambda_2^{*2}e^{i\lambda_2^* R}-\lambda_1^{*2}e^{i\lambda_1^* R}}{R}\Big\}\, dS(\mathbf{x})
\end{aligned} \tag{4.3}$$

حيث هنا: $C^2=\lambda_1^{*2}+\lambda_2^{*2}=-\ell^{*-2}$.

بالتالي، من أجل $\mathbf{y}=\xi$، يصبح لدينا:

$$\begin{aligned}
4\pi(\lambda_2^{*2}-\lambda_1^{*2})\,\psi_i(\xi) = &\int_{\Omega_r} \frac{e^{i\lambda_1^* R}-e^{i\lambda_2^* R}}{R}\, E_i(\mathbf{x})\, d\Omega(\mathbf{x}) + \\
&+\Big(\int_{S_a}+\int_{S_r}\Big)\Big\{\frac{e^{i\lambda_1^* R}-e^{i\lambda_2^* R}}{R}\,\frac{\partial}{\partial n}[\,\Box_C^2\,\psi_i(\mathbf{x})\,] \\
&-[\,\Box_C^2\,\psi_i(\mathbf{x})\,]\,\frac{\partial}{\partial n}\,\frac{e^{i\lambda_1^* R}-e^{i\lambda_2^* R}}{R} + \\
&+\frac{\lambda_2^{*2}e^{i\lambda_2^* R}-\lambda_1^{*2}e^{i\lambda_1^* R}}{R}\,\frac{\partial\psi_i}{\partial n}(\mathbf{x}) \\
&-\psi_i(\mathbf{x})\,\frac{\partial}{\partial n}\,\frac{\lambda_2^{*2}e^{i\lambda_2^* R}-\lambda_1^{*2}e^{i\lambda_1^* R}}{R}\Big\}\, dS(\mathbf{x})
\end{aligned} \tag{4.4}$$

حيث: $R=|\mathbf{x}-\xi|$.

ثانياً) الشروط المقاربية والتمثيلات التكاملية الموافقة في Ω° لكمونات Nowacki للجسم المرن (K-M)، عندما تتغير جميع الحقول الفيزيائية، توافقاً مع الزمن− حالة الحمول الحجمية غير المعدومة.

من أجل استنتاج الشروط المقاربية المذكورة، لنرمز بـ $\mathrm{K}_{S_r}^{(1)}$ و $\mathrm{K}_{S_r}^{(2)}$، على الترتيب، لجزء التكامل السطحي في (4.2) و لجزء التكامل السطحي في (4.4) ، على السطح S_r ، فيكون عندئذٍ:

$$\mathrm{K}_{S_r}^{(1)} = \frac{1}{4\pi} \int_{S_r} \left[\frac{e^{i\sigma_1 r}}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial n}(\mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{i\sigma_1 r}}{r}\right) \right] dS(\mathbf{x}) \,, \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \mathrm{K}_{S_r}^{(2)} = \int_{S_r} \Big\{ & \frac{e^{i\lambda_1^* r} - e^{i\lambda_2^* r}}{r} \frac{\partial}{\partial n} [\,\Box_C^2 \, \psi_i(\mathbf{x})\,] \\ & - [\,\Box_C^2 \, \psi_i(\mathbf{x})\,] \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{i\lambda_1^* r} - e^{i\lambda_2^* r}}{r} + \\ & + \frac{\lambda_2^{*2} e^{i\lambda_2^* r} - \lambda_1^{*2} e^{i\lambda_1^* r}}{r} \frac{\partial \psi_i}{\partial n}(\mathbf{x}) \\ & - \psi_i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial n} \frac{\lambda_2^{*2} e^{i\lambda_2^* r} - \lambda_1^{*2} e^{i\lambda_1^* r}}{r} \Big\} \, dS(\mathbf{x}) \,, \end{aligned} \quad (4.6)$$

ولندرس الآن كلاً من: $\mathrm{K}_{S_r}^{(1)}$ و $\mathrm{K}_{S_r}^{(2)}$ و عندما $r \to \infty$. فإذا اعتبرنا الإحداثيات الكروية: $\mathbf{x} \equiv (r,\theta,\varphi)$ ، يكون: $dS(\boldsymbol{x}) = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$ ، كما يكون: $\frac{\partial f}{\partial n}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial r}(\mathbf{x}) = \partial_r f\,(\mathbf{x})$ ، حيث: $0 \le \theta \le \pi$ و $0 \le \varphi \le 2\pi$ ، و $f\,(\mathbf{x})$ دالة حقيقية تتبع للإحداثيات الكروية المعتمدة[§].

بهذا الشكل، تصبح (4.5) و(4.6)، بعد إجراء الحسابات على التوابع المكاملة، على الشكل التالي:

[§] عندما يكون r كبيراً بالقدر الكافي تصبح كمونات Nowacki تابعة فقط لـ r .

$$\mathsf{K}_{S_r}^{(1)} = \frac{1}{4\pi}\int_{S_r} e^{i\,\sigma_1 r}\,[\,\Phi(\mathbf{x}) + r\,(\partial_r - i\,\sigma_1)\,\Phi(\mathbf{x})\,]\,\frac{dS(\mathbf{x})}{r^2}\,, \quad (4.7)$$

$$\mathsf{K}_{S_r}^{(2)} = \int_{S_r}\Bigg(e^{i\,\lambda_1^* r}\left\{\square_{\lambda_2^*}^2\psi_i(\mathbf{x}) + r\,(\partial_r - i\,\lambda_1^*)\left[\square_{\lambda_2^*}^2\psi_i(\mathbf{x})\right]\right\} - e^{i\,\lambda_2^* r}\left\{\square_{\lambda_1^*}^2\psi_i(\mathbf{x}) + r\,(\partial_r - i\,\lambda_2^*)\left[\square_{\lambda_1^*}^2\psi_i(\mathbf{x})\right]\right\}\Bigg)\frac{dS(\mathbf{x})}{r^2}\,, \quad (4.8)$$

بالأخذ بعين الاعتبار أن: $\lambda_1^{*2} > 0$ و $\lambda_2^{*2} < 0$ ، فيكون λ_1^* عدداً حقيقياً قد يكون موجباً وقد يكون سالباً (في هذه الحالة نختار أحدهما وليكن على سبيل المثال، الموجب؛ أي: $\lambda_1^* > 0$)، كما يكون λ_2^* عددا تخيلياً بحتاً ومرافقه، (في هذه الحالة حصراً سنختار العدد التخيلي البحت ذي الجزء التخيلي الموجب). لهذا الغرض نضع:

$$\lambda_2^* = i\,\beta\;; \qquad \beta := \sqrt{-\lambda_2^{*2}} > 0 \qquad (4.9)$$

وتصبح بذلك العلاقة (4.8) بالشكل:

$$\mathsf{K}_{S_r}^{(2)} = \int_{S_r}\Bigg(e^{i\,\lambda_1^* r}\left\{\square_{i\beta}^2\psi_i(\mathbf{x}) + r\,(\partial_r - i\,\lambda_1^*)\left[\square_{i\beta}^2\psi_i(\mathbf{x})\right]\right\} - e^{-\beta r}\left\{\square_{\lambda_1^*}^2\psi_i(\mathbf{x}) + r\,(\partial_r + \beta)\left[\square_{\lambda_1^*}^2\psi_i(\mathbf{x})\right]\right\}\Bigg)\frac{dS(\mathbf{x})}{r^2}\,, \quad (4.10)$$

حيث: $\square_{i\beta}^2 = \nabla^2 - \beta^2$.

ولنركّز اهتمامنا الآن، على العلاقتين (4.7) و (4.10)، اللتان فيهما: $\sigma_1 > 0$ و $\lambda_1^* > 0$ و $\beta > 0$.

أ) الشروط المقاربية لأجل الكمون السلمي Φ والتمثيل التكاملي الموافق في Ω°:

في (4.7)، لنفرض أنه عندما $r \to \infty$ ، فإن:

$$\Phi = 0(1)\quad , \quad (\partial_r - i\,\sigma_1)\,\Phi = 0(\,r^{-1}\,) \qquad (4.11)$$

حيث الرمز $f = 0(1)$ يعني أن $f \to 0$ عندما $r \to \infty$، أما الرمز $f = 0(\,r^{-1}\,)$، فيعني أن $r\,f = 0(1)$. التالي إذا جعلنا $r \to \infty$ في العلاقة التكاملية (4.2)، فإن $\Omega_r \to \Omega^\circ$ ، وعندئذٍ تحقق (4.11) يجعل $\mathsf{K}_{S_r}^{(1)} \to 0$ ، ويصبح عندئذٍ التمثيل التكاملي (4.2) بالشكل التالي في Ω°:

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{4\pi}\int_{\Omega^\circ} B(\mathbf{x})\frac{e^{i\sigma_1 R}}{R}\,d\Omega(\mathbf{x}) + \int_{S_a}\left[\frac{e^{i\sigma_1 R}}{R}\frac{\partial\Phi}{\partial n}(\mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{i\sigma_1 R}}{R}\right)\right]dS(\mathbf{x}) \qquad (4.12)$$

حيث $\xi \in \Omega^\circ$, $\mathbf{x}$ و $R = |\mathbf{x} - \xi|$ ، وبشرط أن يكون أيضاً، التكامل الحجمي التالي متقارباً:

$$\int_{\Omega^\circ} B(\mathbf{x})\frac{e^{i\sigma_1 R}}{R}\,d\Omega(\mathbf{x}) \qquad (4.13).$$

في المراجع العلمية، ندعو الشروط المقاربية من النوع (4.11) التي تعدم $K_{S_r}^{(1)}$ عندما $r \to \infty$ ، وبالتالي تتحقق (4.12)، ندعوها بشروط Sommerfeld، حيث ندعو الشرط من النوع $(4.11)_1$ بشرط اللانهاية، أما الشرط من النوع $(4.11)_2$، فيدعى بشرط الإشعاع.

ب) الشروط المقاربية لأجل الكمون المتجهي $\vec{\psi}$، والتمثيل التكاملي الموافق في Ω°:

في (4.10)، لنفرض أنه عندما $r \to \infty$ ، فإن:

$$\Box^2_{i\beta}\psi_i = 0(1) \quad , \quad e^{-\beta r}\Box^2_{\lambda_1^*}\psi_i = 0(1) \qquad (4.14)$$

$$(\partial_r - i\lambda_1^*)\left(\Box^2_{i\beta}\psi_i\right) = 0(r^{-1}) \quad , \qquad (4.15)$$

$$e^{-\beta r}(\partial_r + \beta)\left(\Box^2_{\lambda_1^*}\psi_i\right) = 0(r^{-1}) \qquad (4.16)$$

فإذا جعلنا $r \to \infty$ في العلاقة التكاملية (4.4)، فإن $\Omega_r \to \Omega^\circ$، وعندئذٍ تحقق (4.14)-(4.16) يجعل $K_{S_r}^{(2)} \to 0$، ويصبح التمثيل التكاملي (4.4) بالشكل التالي في Ω° :

$$4\pi(\lambda_2^{*2}-\lambda_1^{*2})\,\psi_i(\boldsymbol{\xi})=\int_{\Omega^\circ}\frac{e^{i\lambda_1^* R}-e^{i\lambda_2^* R}}{R}E_i(\mathbf{x})\,d\Omega(\mathbf{x})+$$
$$+\int_{S_a}\Big\{\frac{e^{i\lambda_1^* R}-e^{i\lambda_2^* R}}{R}\frac{\partial}{\partial n}[\Box_C^2\,\psi_i(\mathbf{x})]$$
$$-[\Box_C^2\,\psi_i(\mathbf{x})]\frac{\partial}{\partial n}\frac{e^{i\lambda_1^* R}-e^{i\lambda_2^* R}}{R}+ \tag{4.17}$$
$$+\frac{\lambda_2^{*2}e^{i\lambda_2^* R}-\lambda_1^{*2}e^{i\lambda_1^* R}}{R}\frac{\partial\psi_i}{\partial n}(\mathbf{x})$$
$$-\psi_i(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial n}\frac{\lambda_2^{*2}e^{i\lambda_2^* R}-\lambda_1^{*2}e^{i\lambda_1^* R}}{R}\Big\}\,dS(\mathbf{x})$$

حيث هنا $\mathbf{x},\,\boldsymbol{\xi}\in\Omega^\circ$ و $R=|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|$، وبشرط أن يكون أيضاً، التكامل الحجمي التالي متقارباً:

$$\int_{\Omega^\circ}\frac{e^{i\lambda_1^* R}-e^{i\lambda_2^* R}}{R}E_i(\mathbf{x})\,d\Omega(\mathbf{x}) \tag{4.18}$$

تجدر الإشارة هنا إلى الشيء التالي. عندما يكون r كبيراً بالقدر الكافي، تصبح كمونات Nowacki : Φ و ψ_i تابعة فقط لـ r، في الوقت الذي يصبح فيه:

$$\nabla^2=\partial_r^2+\frac{2}{r}\partial_r\quad,\quad \Box_{\lambda_1^*}^2=\partial_r^2+\frac{2}{r}\partial_r+\lambda_1^{*2}\ ,$$
$$\Box_{i\beta}^2=\partial_r^2+\frac{2}{r}\partial_r-\beta^2 \tag{4.19}$$

بالتالي فإن المؤثرين الاشتقاقيين $\Box_{\lambda_1^*}^2$ و $\Box_{i\beta}^2$، الموجودين في الشروط المقاربية: (4.14) -(4.16)، يعطيان من خلال (4.19).

ومنه يمكن صياغة المبرهنة التالية حول شروط Sommerfeld لكمونات Nowacki، للجسم المرن (K-M)، ذلك عندما تتغير الحقول الفيزيائية، توافقياً مع الزمن– حالة الحمول الحجمية غير المعدومة.

<u>*مبرهنة :*</u> لنفرض أن الدوال $\Phi(\mathbf{x})$ و $\psi_i(\mathbf{x})$ من الصف من الصف C^5 في Ω،عندئذٍ:

1) إذا كان التكامل الحجمي (4.13)، متقارباً وتحققت شروط Sommerfeld (4.11)، عندئذٍ $\mathrm{K}_{S_r}^{(1)} \to 0$، عندما $r \to \infty$، ويتحقق التمثيل التكاملي (4.12) في Ω°؛

2) إذا كان التكامل الحجمي (4.18)، متقارباً وتحققت شروط Sommerfeld (4.14) -(4.16)، عندئذٍ $\mathrm{K}_{S_r}^{(2)} \to 0$، عندما $r \to \infty$، ويتحقق التمثيل التكاملي (4.17) في Ω°.

5. الاستنتاجات والمقترحات:

<u>*أولاً: الاستنتاجات:*</u> في البحث تم استنتاج تلك الشروط الحدية في اللانهاية، التي تجعل كمونات Nowacki للجسم المرن (K-M) تقبل تمثيلاً تكاملياً، حيث التكامل السطحي على سطح الكرة S_a التي يقع خارجها الجسم، وذلك في حالة الحمول الحجمية غير المعدومة، والمتغيرة توافقياً بالنسبة للزمن.

<u>*ثانياً: المقترحات:*</u> فيمايلي يمكن أن نقترح المسائل التالية، الجديدة ،للمناقشة:

المسألة الأولى: إجراء الدراسة السابقة لأجل (K-M) ،<u>المترابط</u> مع حقل درجات حرارة، <u>بوجود مصادر حرارية غير معدومة</u>، ومتغيرة توافقياً مع الزمن.

المسألة الثانية: إجراء الدراسة السابقة أيضاً لأجل (K-M) ،<u>المترابط</u> مع حقل كهرطيسي، <u>بوجود مصادر كهرطيسية</u>، ومتغيرة توافقياً مع الزمن.

المسألة الثالثة: دراسة الشروط المقاربية لأجل كمونات Nowacki ، ولأجل كمونات Nowacki-Ignaczak، ولأجل الازاحات للجسم المرن دقيق الاستقطاب، بوجود حمول حجمية غير معدومة، وعندما تتغير جميع الحقول الفيزيائية توافقياً مع الزمن، وفي حالة وجود وعدم وجود حقل درجات حرارة.

المراجع

[1]- Koiter ,W.T. , **1964** – Couple-Stresses in the theory of elasticity, Koninkl. Nederl. Akad .Van Wetensehappen. Proc . Ser . 8,1-1964 , 67 ,1,17;1964,67,1,30 .

[2]- Mindlin ,R.D. , **1962** – Tiersten , H.F., Effects of couple–Stresses in linear elasticity , Arch . Rat.Mech.Anal. , 1962,11,5,415.

[3]- Mindlin , R.D. , **1963** – Influence of couple-Stresses on stress concentration , Exper . Mech .,1963,3,1.

[4] Sommerfeld A., **1950-** *Mechanics of Deformable Bodies*, New York.

[5]-Hanaa Kazem, , **2014** – The Sommerfeld radiation conditions for the Nowacki's potential problem of the Hooke elastic body in the case of nonzero body loads, harmonically varying in time, Journal of Al-Baath University,Vol.36.

[6]-Mountajab Al-Hasan and Husam Shakkouf , **2016** – The Sommer-feld asymptotic conditions for displacements in Hooke elastic body with no vanishing body loads harmonically varying in time, Journal of Al-Baath University,Vol.38, Nr.4, p. 11-24**.**

[7]- Kamel Mouhamad, Mountajab Al-Hasan, **2011** – An integral – differential mathematical model of elastic body in the frame of

linear dynamic thermoelasticity, Journal of Al-Baath University,Vol.33, Nr.25, p.119 -148.

[8]- Rasha Tulemat , **2010** – Transforming the Partial Differential Equations of Elastic Body into Integral Equations on Spherical Surface, **Dissertation** , Faculty of Science , Al-Baath University.

[9]-Taleb Gareeba, Mountajab Al-Hasan , Rasha Tulemat , **2009** – Using volume – surface transforms for translating the differential equations of elastic body into integral equations, , Journal of Al-Baath University,Vol.31, Nr.20, p.175 -192.

[10] Al-Hasan M., Dyszlewicz J., **2001**- Radiation conditions and integral representations of a solution in coupled micropolar thermoelasticity, **J**. Thermal Stresses, **24** (2001), 1007 – 1018.

[11]- kupradse , Gegelya ,Bashelishili , Burchuladse, **1968** & **1976** – Three Dimensional Problems of The Mathematical Theory of Elasticity and Thermoelasticity , Izd.Nauka.Moscow.

[12]-Ignaczak , **1972 -** Radiation conditions in asymmetric elasticity, J.Ela.**2**,307-321.

[13]-Ignaczak , **1970-** Radiation conditions of Sommerfeld type for elastic materials with microstrecture,Bull.Acad.Polon.Sci.Sér.Sci. **18**,6-473,

[14]- Ignaczak i Nowacki, **1965 -** Osobliwe równania całkowe termosprężystości, Rosprawe Inżynierskie,**13(1965)**,655-670.

[15]-Kupradse , **1963 -** Dynamical problems in elasticity , Progress in Solid Mech.,vol.3,North-Holland Publ.Co.,Amsterdam.

[16] Ignaczak J. , Nowacki W., **1962 -**The Sommerfeld radiation conditions for coupled thermoelasticity, Arch. Mech. Stos.**14**,3– 13.

[17]-Nowacki , **1970 -** Theory of Elasticity , Warsaw PWN.