تقريب دوال الفضاء $L_{[-1,+1]}$ باستخدام كثيرات حدود ليجندر و جاكوبي

طالب الدكتوراه: عمر محمود نتوف

إشراف الأستاذ الدكتور: محمد عامر

جامعة البعث – كلية العلوم – قسم الرياضيات

الملخص

سنتعرف في هذا البحث على كثيرات حدود ليجندر و جاكوبي ثم نقوم بإثبات صحة مبرهنتين ، تتحدث الأولى عن درجة تقريب منشور فورييه _ ليجندر في النقطة $x = 0$ ، وتتحدث الثانية عن درجة تقريب منشور فورييه _ جاكوبي في النقطة $x = 1$ ، وسنعتمد في إثبات المبرهنتين على المؤثر المصفوفي وذلك في الفضاء $L_{[-1,+1]}$.

كلمات مفتاحية: كثيرات حدود ليجندر، كثيرات حدود جاكوبي، متسلسلة فورييه ـــــ ليجندر، متسلسلة فورييه ـــــ جاكوبي، الدالة المولدة، درجة التقريب.

Approximation of Functions of Space $L_{[-1،+1]}$ Using Legendre and Jacobi polynomials

Abstract

In this research we are going to discuss Legendre and Jacobi Polynomials then we will provide the proof of two theorems, the first one talks about the approximation`s degree of Fourier – Legendre series at the point x=0, and the second talks about the approximation`s degree of Fourier- Jacobi series at the point x=1, using the matrix operator in both cases and in the space $L_{[-1،+1]}$.

Key words:

Legendre Polynomial, Jacobi Polynomial, Fourier – Legendre Series, Fourier - Jacobi Series, the generated function, Degree of Approximation.

مقدمة:

إن تقريب دوال الفضاء $L_{[-1،+1]}$ باستخدام كلٍ من متسلسلة فورييه ـــــ ليجندر ومتسلسلة فورييه ـــــ جاكوبي يتم عن طريق بعض المؤثرات الخطية المحدودة والتي تؤثر على متتالية المجاميع الجزئية لتلك المتسلسلات فتنقلها لمتتاليات أخرى تُقرب باستخدام النظيم في الفضاء $L_{[-1،+1]}$ إلى الدوال نفسها وبدرجات تقريب مختلفة.

أهمية وهدف البحث:

إيجاد درجة تقريب دوال الفضاء $L_{[-1،+1]}$ وذلك باستخدام المؤثر المصفوفي وتطبيقه على الحد العام لمتتالية المجاميع الجزئية لكلٍ من متسلسلة فورييه ـــــ ليجندر و متسلسلة فورييه ـــــ جاكوبي.

مشكلة البحث:

تقريب دوال الفضاء المذكور باستخدام المؤثر المصفوفي وذلك بعد إيجاد النظيم واستخدامه في عملية التقريب.

مواد وطرائق البحث:

تعريف (1) المؤثر المصفوفي : $(Matrix\ \ Operator)[1]$

لتكن لدينا المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ ولتكن $\{S_n\}$ متتالية مجاميعها الجزئية، عندئذٍ نعرف المؤثر المصفوفي (A)بالشكل الآتي:

$$t_n^A = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\, S_k = \sum_{k=0}^{n} a_{n,n-k}\, S_{n-k} \qquad ; \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

والمصفوفة $A = \left(a_{n،k}\right)$هي مصفوفة مثلثية سفلى لا نهائية من الثوابت الحقيقية.

وتحقق الشروط الآتية:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} = 1 \quad , \quad \lim_{n\to\infty} a_{n,k} = 0 \quad ; k = 0,1,2, \ldots$$

$$\sum_{k=0}^{n} \left|a_{n,k}\right| \le M \ \ ; \ \ n = 1,2, \ldots \qquad (\text{حيث إن } M \text{ ثابت لا يتعلق بـ } n\ )$$

تعريف (2) النظيم في الفضاء [7] $L_{[-1،+1]}$:

إذا كانت الدالة f كمولة لوبيغياً على الفترة $[-1,+1]$فإن النظيم في الفضاء $L_{[-1,+1]}$ يأخذ الشكل الآتي:

$$\|f(x)\|_{L_{[-1,+1]}} = \int_{-1}^{+1} |f(x)|\, dx$$

تعريف (3) كثيرات حدود ليجندر [4]:

تعرف كثيرات حدود ليجندر $l_n(x)$ بالشكل الآتي:

$$l_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}\{(1-x)^n(1+x)^n\} \quad ;\ n = 0,1,2 \ldots$$

وهي حلول المعادلة التفاضلية الآتية:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0 \quad ; n = 0,1,2 \ldots.$$

تعريف (4) الدالة المولدة لكثيرات حدود ليجندر[6]:

تعطى الدالة المولدة لكثيرات حدود ليجندر بالشكل الآتي:

$$(1-2x\gamma+\gamma^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} l_n(x)\gamma^n \quad ; |\gamma| < 1 , |x| \le 1$$

كما أن كثيرات حدود ليجندر متعامدة على الفترة $[-1,+1]$ مع دالة الوزن $W(x) = 1$

$$\int_{-1}^{+1} l_n(x) l_m(x)\, dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{n,m}$$

حيث $\delta_{n,m}$ رمز دلتا كرونيكر ويعطى كما يلي:

$$\delta_{n,m} = \begin{cases} 1 \ ; & n = m \\ 0 \ ; & n \ne m \end{cases}$$

تعريف (5) كثيرات حدود جاكوبي [5]:

تعرف كثيرات حدود جاكوبي $J_n^{(\alpha,\beta)}$ بالشكل الآتي:

$$J_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{1}{(1-x)^\alpha (1+x)^\beta} \frac{d^n}{dx^n}\{(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\}$$

حيث أن$n = 0,1,2 \ldots$ ؛

وهي حلول المعادلة التفاضلية الآتية:

$$(1-x^2)y'' + [\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x]y' + n(n+\alpha+\beta+1)y = 0$$

تعريف (6) الدالة المولدة لكثيرات حدود جاكوبي [6]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} J_n^{(\alpha,\beta)}(x)\gamma^n = 2^{\alpha+\beta}(1-2x\gamma+\gamma^2)^{-\frac{1}{2}}\left\{1-\gamma+(1-2x\gamma+\gamma^2)^{\frac{1}{2}}\right\}^{-\alpha}\left\{1+\gamma+(1-2x\gamma+\gamma^2)^{\frac{1}{2}}\right\}^{-\beta}$$

حيث إن كثيرات حدود جاكوبي متعامدة على الفترة $[-1,+1]$ مع دالة الوزن $W(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$

$$\int_{-1}^{+1}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}J_n^{(\alpha,\beta)}(x)J_m^{(\alpha,\beta)}(x)\,dx = \frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+1)}\delta_{n,m}$$

تعريف (7) [3]:

يمكننا انَّ نعرف $(\boldsymbol{Big-O})$ $(\boldsymbol{O}$_الكبيرة$)$و$(\boldsymbol{o}-$ الصغيرة$)$ $(\boldsymbol{Little-o})$ كما يلي:

1- نقول إن $f(x) = O(g(x))$ عندما $x \to a$ إذا وجد ثابت موجب c يحقق ما يلي:

$$|f(x)| \le c|g(x)|$$

2- نقول إن $f(x) = o(g(x))$ عندما $x \to a$ إذا تحقق ما يلي

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

النتائج ومناقشتها:

تقريب دوال الفضاء $\boldsymbol{L}_{[-1,+1]}$ باستخدام كثيرات حدود ليجندر:

لتكن لدينا الدالة $f \in L_{[-1,+1]}$ عندئذٍ يعطى منشور هذه الدالة بدلالة كثيرات حدود ليجندر $l_n(x)$ وفق الآتي:

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} d_n(f) l_n(x) \quad \dots \ (1)$$

حيث:

$$d_n(f) = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} l_n(z) f(z)\, dz$$

ولتكن $A \equiv (a_{n,k})$ مصفوفة مثلثية سفلى لانهائية من العناصر غير السالبة والتي تحقق $A_{n,k} = \sum_{r=k}^{n} a_{n,r} \ , A_{n,n} = 1 \ ; n \geq 0$

$$t_n^A = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} S_k(f;x)$$

مبرهنة (1): إن درجة تقريب منشور فوربيه ـــــ ليجندر في النقطة $x = 0$ باستخدام المؤثر المصفوفي t_n^A تعطى كما يلي :

$$\| \ t_n^A(f,0) \text{ -} f(0) \ \|_{L_{[-1،+1]}} = \ o\big(\varphi(n)\big)$$

بحيث تتحقق الفرضية الآتية:

$$\int_0^{\pi} \sqrt{\sin\theta} \, |\psi(\theta)| \, d\theta = o\left(\frac{\sqrt{n\pi}}{4n+1} \varphi(n)\right)$$

حيث إن $\varphi(t)$ دالة موجبة متزايدة باطراد بالنسبة إلى t وتحقق:

$$\varphi(n) \to \infty \ ; n \to \infty$$

تقريب دوال الفضاء $L_{[-1,+1]}$ باستخدام متسلسلة فورييه – جاكوبي (Fourier – Jacobi Series):

لتكن لدينا الدالة $f \in L_{[-1,+1]}$ عندئذٍ يعطى منشور هذه الدالة بدلالة كثيرات حدود جاكوبي $J_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ وفق الآتي :

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f)\, J_n^{(\alpha,\beta)}(x)$$

حيث $a_n(f)$ هي معاملات منشور فورييه ــــ جاكوبي وتعطى الشكل:

$$a_n(f) = \frac{(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)} \int_{-1}^{+1} (1-z)^{\alpha}(1+z)^{\beta} f(z) J_n^{(\alpha,\beta)}(z)\,dz$$

مبرهنة (2): : إن درجة تقريب منشور فورييه ــــ جاكوبي في النقطة $x = 1$ باستخدام المؤثر المصفوفي t_n^A تعطى كما يلي:

$$\| t_n^A(f,1) - f(1) \|_{L_{[-1,+1]}} = o\big(\xi(n)\big)$$

وبحيث تتحقق الفرضيات الآتية:

$$\int_0^{\frac{c}{n}} \Theta(\theta)\sin(\theta)\,d\theta = o\left(\frac{\Gamma(n+\beta+1)\xi(n)}{(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)n^{\alpha}}\right)$$

$$\int_{\frac{c}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \theta^{-\alpha-\frac{1}{2}}\Theta(\theta)\sin(\theta)\,d\theta = o\left(\frac{\Gamma(n+\beta+1)\xi(n)}{(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)n^{-\frac{1}{2}}}\right)$$

حيث c ثابت موجب و $\xi(t)$ دالة موجبة متزايدة باطراد بالنسبة إلى t وتحقق:

$$\xi(n) \to \infty \,;\, n \to \infty$$

نعرض الإثبات بعد التمهيديات الآتية، حيث نعتمد عليها في إثبات المبرهنتين السابقتين:

تمهيدية (1) [2]:

ليكن α, β عددين حقيقيين اختياريين فإنه عندما $n \longrightarrow \infty$ يكون:

$$J_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta) = n^{-\frac{1}{2}} K(\theta)\cos(N\theta + V) + O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right) \quad ; \quad 0 \le \theta \le \pi$$

حيث إن:

$$K(\theta)=\pi^{-\frac{1}{2}}\left(sin\frac{\theta}{2}\right)^{-\alpha-\frac{1}{2}}\left(cos\frac{\theta}{2}\right)^{-\beta-\frac{1}{2}}$$

$$N=n+\frac{\alpha+\beta+1}{2}\ ,\qquad V=-\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}$$

وترتبط كثيرات حدود جاكوبي مع كثيرات حدود ليجندر بوضع $\alpha=\beta=0$ في كثيرات حدود جاكوبي لنحصل على كثيرات حدود ليجندر ومنه نجد:

$$N=n+\frac{1}{2}\ ,\qquad V=-\frac{\pi}{4}$$

$$K(\theta)=\pi^{-\frac{1}{2}}\left(sin\frac{\theta}{2}\right)^{-\alpha-\frac{1}{2}}\left(cos\frac{\theta}{2}\right)^{-\beta-\frac{1}{2}}=\pi^{-\frac{1}{2}}\left(sin\frac{\theta}{2}cos\frac{\theta}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}(sin\,\theta)^{-\frac{1}{2}}$$

ومما سبق تنتج التمهيدية الآتية:

تمهيدية (2):

إذا كانت $\alpha=\beta=0$ فإنه عندما $n\longrightarrow\infty$ يكون:

$$l_n(cos\,\theta)=n^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}(sin\,\theta)^{-\frac{1}{2}}cos\left(n\theta+\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)\quad ;$$

$$0\le\theta\le\pi$$

تمهيدية (3) [2]:

ليكن α,β عددين حقيقيين اختياريين وليكن c ثابت موجب فإنه عندما $n\ \leftarrow\ \infty$ يكون:

$$J_n^{(\alpha,\beta)}(cos\,\theta)=\begin{cases}\theta^{-\alpha-\frac{1}{2}}O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right) & ; \qquad cn^{-1}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\\ O(n^{\alpha}) & ; \qquad 0\le\theta\le cn^{-1}\end{cases}$$

إثبات المبرهنة (1):

لدينا كما هو معلوم

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=\sum_{n=0}^{\infty} l_n(x)t^n$$

وعندما $x=0$ نجد:

$$(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty} l_n(0)t^n$$

$$1-\frac{t^2}{2}+\frac{1.3}{2^3}t^4\dots\dots\dots=l_0(0)t^0+l_1(0)t^1+l_2(0)t^2+\cdots$$

بالمطابقة نجد:

$$l_0(0)=1 \quad ,l_2(0)=-\frac{1}{2} \quad ,l_4(0)=\frac{3}{8}\ ,\dots\dots$$

$$l_1(0)=l_3(0)=\cdots=0$$

ومنه نجد:

$$l_{2n+1}(0)=0 \quad , \quad l_{2n}(0)=\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

وبما أن:

$$S_n(f,0)=\sum_{k=0}^{n} d_k(f)l_k(0)$$

لذا نستطيع أن نكتب الآتي:

$$S_n(f,0)=\sum_{k=0}^{n} d_{2k}(f)l_{2k}(0)$$

حيث قمنا بتبديل كل k بـ $2k$

وبما أن:

$$l_{2n+1}(0)=0 \quad , \quad l_{2n}(0)=\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

ونعلم أن:

$$d_{2k}(f) = \frac{4k+1}{2}\int_{-1}^{+1} l_{2k}(y) f(y)\, dy$$

ومنه نجد:

$$S_n(f,0) = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{4k+1}{2}\right)\int_{-1}^{+1} f(y) l_{2k}(y) dy \frac{(-1)^k(2k-1)!!}{(2k)!!}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} f(y)\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k(2k-1)!!\,(4k+1)}{(2k)!!} l_{2k}(y) dy$$

وبما أن:

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k(2k-1)!!\,(4k+1)}{(2k)!!} l_{2k}(y) = O\left[\frac{(-1)^n(2n-1)!!\,(4n+1)}{(2n)!!} l_{2n}(y)\right]$$

ومنه نجد:

$$S_n(f,0) = O\left[\frac{(-1)^n(2n-1)!!\,(4n+1)}{2(2n)!!}\int_{-1}^{+1} f(y)\, l_{2n}(y) dy\right]$$

$$t_n^A(f,0) = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} O\left[\frac{(-1)^k(2k-1)!!\,(4k+1)}{2(2k)!!}\int_{-1}^{+1} f(y)\, l_{2k}(y) dy\right]$$

ولنضع العلاقة المفيدة الآتية:

$$\phi(y) = \frac{f(y) - f(0)}{2}$$

ومنه فإن:

$$t_n^A(f,0)-f(0)$$
$$=\sum_{k=0}^{n} a_{n,k} O\left[\frac{(-1)^k(2k-1)!!\,(2k+1)}{(2k)!!}\int_{-1}^{+1}\phi(y)\,l_{2k}(y)dx\right]$$

لاحظ:

$$\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}=\frac{(2k-1)(2k-3)(2k-5)\times\ldots\times 5\times 3\times 1}{(2k)(2k-2)(2k-4)\times\ldots\times 6\times 4\times 2}<1$$

أي أن: $\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}=o(1)$.

نفرض أن: $y=\cos\theta$ حيث $-1\le y\le 1$ أي $0\le\theta\le\pi$ ومنه:

$$\int_{-1}^{+1}\phi(y)\,l_{2k}(y)dy=-\int_{\pi}^{0}\phi(\cos\theta)\,l_{2k}(\cos\theta)\,sin\,\theta\,d\theta$$
$$=\int_{0}^{\pi}sin\,\theta\,\phi(\cos\theta)\,l_{2k}(\cos\theta)d\theta$$

وبالتالي نجد:

$$\int_0^{\pi}\left|\phi(\cos\theta)\right||sin\,\theta|\,|l_{2k}(\cos\theta)|d\theta$$
$$<\int_0^{\pi}\left|\phi(\cos\theta)\right||sin\,\theta|\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}(2k)^{-\frac{1}{2}}(sin\,\theta)^{-\frac{1}{2}}d\theta$$

وذلك حسب التمهيدية (2).

حيث إن:

$$(sin\,\theta)^{\frac{1}{2}}|l_n(\cos\theta)|<\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}(n)^{-\frac{1}{2}};\ 0\le\theta\le\pi$$

إذاً:

$$\int_0^{\pi}\left|\phi(\cos\theta)\right||sin\,\theta|\,|l_{2k}(\cos\theta)|d\theta<\left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}(k)^{-\frac{1}{2}}\int_0^{\pi}\frac{|sin\,\theta|}{\sqrt{sin\,\theta}}\left|\phi(\cos\theta)\right|d\theta$$

$$= \left(\frac{1}{\pi k}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^{\pi} \sqrt{sin\,\theta}\,\left|\phi(\cos\theta)\right| d\theta$$

$$f(y)|_{y=0} = f(0)$$

$$f(y)|_{y=0} = g(\theta)|_{\cos\theta=0} = g(\theta)|_{\theta=arc\cos 0} = g\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$g(x) = (f \circ cos)(x)$$

$$\phi(y) = \psi(\theta) = \frac{g(\theta) - g\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2} \;\; ; \;\; \psi(x) = \phi \circ cos(x)$$

$$\Longrightarrow \int_0^{\pi} \sqrt{sin\,\theta}\,\left|\phi(\cos\theta)\right| d\theta = \int_0^{\pi} \sqrt{sin\,\theta}\,\left|\psi(\theta)\right| d\theta$$

$$t_n^A(f,0) - f(0) = t_n^A\left(g,\frac{\pi}{2}\right) - g\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

حيث: $g = f \circ cos$، ومنه:

$$t_n^A\left(g,\frac{\pi}{2}\right) - g\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} O\left[\frac{(-1)^k (2k-1)!!\,(4k+1)}{(2k)!!\,(\pi k)^{\frac{1}{2}}} \int_0^{\pi} \sqrt{sin\,\theta}\,\left|\psi(\theta)\right| d\theta\right]$$

وحسب فرضيات المبرهنة يكون:

$$|t_n^A(f,0) - f(0)| = O\left(\frac{4n+1}{\sqrt{n\pi}}\right) \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\, o\left(\frac{\sqrt{n\pi}}{4n+1}\varphi(n)\right)$$

$$= O\left(\frac{4n+1}{\sqrt{n\pi}}\right) o\left(\frac{\sqrt{n\pi}}{4n+1}\varphi(n)\right) \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}$$

وبالتالي:

$$|t_n^A(f,0)-f(0)| = O\left(n^{+\frac{1}{2}}\right) o\left(\varphi(n) n^{-\frac{1}{2}}\right) \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}$$

$$= o\big(\varphi(n)\big) \ ; \ \ n \longrightarrow \infty$$

حيث إن:

$$\frac{4n+1}{(n\pi)^{\frac{1}{2}}} = \frac{4n+1}{\sqrt{n\pi}} = O\big(\sqrt{n}\big) = O\left(n^{+\frac{1}{2}}\right)$$

إذاً:

$$\int_{-1}^{+1} |t_n^A(f,0)-f(0)| dx = o\big(\varphi(n)\big) \int_{-1}^{+1} dx = 2o\big(\varphi(n)\big)$$

$$= o\big(\varphi(n)\big) ; \ \ n \longrightarrow \infty$$

عندئذٍ:

$$\|t_n^A(f,0)-f(0)\|_{L_{[-1,+1]}} = o\big(\varphi(n)\big) \ ; \ \ n \longrightarrow \infty$$

وبهذا يكون إثبات المبرهنة الأولى قد اكتمل.

إثبات المبرهنة (2):

نعلم أن الدالة المولدة لكثيرات حدود جاكوبي تعطى بالعلاقة الآتية:

$$\frac{2^{\alpha+\beta}}{R(1-t+R)^{\alpha}(1+t+R)^{\beta}} = \sum_{n=0}^{\infty} J_n^{(\alpha,\beta)}(x) t^n$$

حيث: $R = \sqrt{1-2xt+t^2}$

$$x = 1 \Longrightarrow \frac{2^{\alpha+\beta}}{\sqrt{1-2t+t^2}\big(1-t+\sqrt{1-2t+t^2}\big)^{\alpha}\big(1+t+\sqrt{1-2t+t^2}\big)^{\beta}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} J_n^{(\alpha,\beta)}(1) t^n$$

$$\frac{2^{\alpha+\beta}}{\sqrt{(1-t)^2}\left(1-t+\sqrt{(1-t)^2}\right)^{\alpha}\left(1+t+\sqrt{(1-t)^2}\right)^{\beta}}=\sum_{n=0}^{\infty}J_n^{(\alpha,\beta)}(1)t^n$$

$$\frac{2^{\alpha+\beta}}{(1-t)(1-t+1-t)^{\alpha}(1+t+1-t)^{\beta}}=\sum_{n=0}^{\infty}J_n^{(\alpha,\beta)}(1)t^n$$

$$\Longrightarrow\frac{2^{\alpha+\beta}}{(1-t)(2-2t)^{\alpha}(2)^{\beta}}=\sum_{n=0}^{\infty}J_n^{(\alpha,\beta)}(1)t^n\ \ ;\ \ |t|<1$$

$$\Longrightarrow\frac{2^{\alpha+\beta}}{(2)^{\alpha}(2)^{\beta}(1-t)(1-t)^{\alpha}}=\frac{1}{(1-t)^{\alpha+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}J_n^{(\alpha,\beta)}(1)t^n\ \ ;\ \ |t|<1$$

لكن:

$$\frac{1}{(1-t)^{\alpha+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+\alpha}{n}t^n$$

وذلك لأن:

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)}=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

ومنه نجد:

$$\left(\frac{1}{1-t}\right)^{(\alpha)}=\frac{\alpha!}{(1-t)^{\alpha+1}}=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(1-t)^{\alpha+1}}$$

$$\frac{1}{(1-t)^{\alpha+1}}=\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\sum_{n=0}^{\infty}t^n\right)^{(\alpha)}=\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\sum_{n=\alpha}^{\infty}\frac{d^{\alpha}}{dt^{\alpha}}t^n\right)\ \ ;\ \alpha\leq n$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\sum_{n=\alpha}^{\infty}\frac{n!}{(n-\alpha)!}t^{n-\alpha}\right)=\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+\alpha)!}{n!}t^n\right)$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+\alpha)!}{\alpha!\, n!} t^n \right)$$

إذاً:

$$\frac{1}{(1-t)^{\alpha+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+\alpha}{n} t^n$$

وبالمطابقة مع: $\frac{1}{(1-t)^{\alpha+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} J_n^{(\alpha,\beta)}(1) t^n$ نحصل على: $J_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \binom{n+\alpha}{n}$.

لنكتب الآن:

$$S_n(f,1) = \sum_{k=0}^{n} a_k(f)\, J_k^{(\alpha,\beta)}(1)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k+\alpha+\beta+1)\Gamma(k+\alpha+\beta+1)\Gamma(k+1)}{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(k+\alpha+1)\Gamma(k+\beta+1)} \binom{k+\alpha}{k} \int_{-1}^{+1} (1-y)^{\alpha}(1+y)^{\beta} f(y) J_k^{(\alpha,\beta)}(y)\,dy$$

$$= \frac{1}{2^{\alpha+\beta+1}} \int_{-1}^{+1} (1-y)^{\alpha}(1+y)^{\beta} f(y) \sum_{k=0}^{n} \binom{k+\alpha}{k} \frac{(2k+\alpha+\beta+1)\Gamma(k+\alpha+\beta+1)\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+\alpha+1)\Gamma(k+\beta+1)} J_k^{(\alpha,\beta)}(y)\,dy$$

$$= \frac{1}{2^{\alpha+\beta+1}} \int_{-1}^{+1} (1-y)^{\alpha}(1+y)^{\beta} f(y) \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k+\alpha+\beta+1)\Gamma(k+\alpha+\beta+1)\Gamma(k+1)\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(k+\alpha+1)\Gamma(k+\beta+1)\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha+1)} J_k^{(\alpha,\beta)}(y)\,dy$$

$$= \frac{1}{2^{\alpha+\beta+1}} \int_{-1}^{+1} (1-y)^{\alpha}(1+y)^{\beta} f(y) \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k+\alpha+\beta+1)\Gamma(k+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(k+\beta+1)\Gamma(\alpha+1)} J_k^{(\alpha,\beta)}(y)\,dy$$

ولدينا

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(2k+\alpha+\beta+1)\Gamma(k+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(k+\beta+1)\Gamma(\alpha+1)}J_k^{(\alpha,\beta)}(y) = O\left[\frac{(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(n+\beta+1)\Gamma(\alpha+1)}J_n^{(\alpha,\beta)}(y)\right]$$

ومنه نجد أن:

$$S_n(f,1)=\frac{1}{2^{\alpha+\beta+1}}\int_{-1}^{+1}(1-y)^{\alpha}(1+y)^{\beta}f(y)\times$$

$$\times O\left[\frac{(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}J_n^{(\alpha,\beta)}(y)\right]dy$$

$$t_n^A(f,1)=\sum_{k=0}^{n}a_{n,k}\,O\left[\frac{(2k+\alpha+\beta+1)\Gamma(k+\alpha+\beta+1)}{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+1)\Gamma(k+\beta+1)}\times \times\int_{-1}^{+1}(1-y)^{\alpha}(1+y)^{\beta}f(y)\,J_k^{(\alpha,\beta)}(y)dy\right]$$

ولنضع العلاقة المفيدة الآتية:

$$\Psi\,(y)=\frac{(1-y)^{\alpha}(1+y)^{\beta}[f(y)-f(1)]}{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+1)}$$

ومنه نجد:

$$t_n^A(f,1)-f(1)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}a_{n,k}\;O\left[\frac{(2k+\alpha+\beta+1)\Gamma(k+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(k+\beta+1)}\times \times\int_{-1}^{+1}\Psi(y)\,J_k^{(\alpha,\beta)}(y)dy\right]$$

نفرض أن: $y=\cos\theta$ حيث $-1\le y\le 1$ أي $0\le\theta\le\pi$ ومنه:

$$\int_{-1}^{+1} \Psi(y) J_k^{(\alpha,\beta)}(y)\, dy = -\int_{\pi}^{0} \Psi(\cos\theta)\, J_k^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)\, sin\,\theta\, d\theta$$

$$= 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \Psi(\cos\theta)\, J_k^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)\, sin\,\theta\, d\theta$$

$$= 2\int_{0}^{\frac{c}{n}} \Psi(\cos\theta) J_k^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)\, sin\,\theta\, d\theta$$

$$+ 2\int_{\frac{c}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \Psi(\cos\theta)\, J_k^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)\ \ sin\,\theta\, d\theta$$

$$= 2\int_{0}^{\frac{c}{n}} \Psi(\cos\theta) O(n^{\alpha})\, sin\,\theta\, d\theta + 2\int_{\frac{c}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \Psi(\cos\theta)\theta^{-\alpha-\frac{1}{2}} O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)\ \ sin\,\theta\, d\theta$$

$$= 2O(n^{\alpha}) \int_{0}^{\frac{c}{n}} \Psi(\cos\theta)\, sin\,\theta\, d\theta$$

$$+ 2O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)\ \int_{\frac{c}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \Psi(\cos\theta)\theta^{-\alpha-\frac{1}{2}}\ \ sin\,\theta\, d\theta$$

وذلك حسب التمهيدية (3)

ومن جهة أخرى:

$$f(y)|_{y=1} = g(\theta)|_{\cos\theta=1} = g(\theta)|_{\theta=arc\cos 1} = g(0)$$

$$g(x) = (f \circ cos)(x)$$

$$\Psi(\cos\theta) = \Theta(\theta) = \frac{(1-\cos\theta)^{\alpha}(1+\cos\theta)^{\beta}\ [g(\theta)-g(0)]}{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+1)}$$

$$;\ \ \Theta(x) = \Psi \circ cos(x)$$

وبالتالي نجد:

$$2O(n^{\alpha}) \int_{0}^{\frac{c}{n}} \Psi(\cos\theta)\ \ sin\,\theta\, d\theta + 2O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)\ \int_{\frac{c}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \Psi(\cos\theta)\theta^{-\alpha-\frac{1}{2}}\ \ sin\,\theta\, d\theta$$

$$= 2O(n^{\alpha})\int_{0}^{\frac{c}{n}}\Theta(\theta)\ \sin\theta\, d\theta + 2O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)\ \int_{\frac{c}{n}}^{\frac{\pi}{2}}\Theta(\theta)\theta^{-\alpha-\frac{1}{2}}\ \sin\theta\ d$$

وبما أن:

$$|t_n^A(f,1) - f(1)| = |t_n^A(g,0) - g(0)|$$

$$|t_n^A(f,1) - f(1)| =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\ O\left[\frac{(2k+\alpha+\beta+1)\Gamma(k+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(k+\beta+1)}\right.$$
$$\left.\times\left\{2O(n^{\alpha})\int_{0}^{\frac{c}{n}}\Theta(\theta)\sin\theta\, d\theta + 2O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)\ \int_{\frac{c}{n}}^{\frac{\pi}{2}}\Theta(\theta)\theta^{-\alpha-\frac{1}{2}}\ \sin\theta\, d\theta\right\}\right]$$

وحسب فرضيات المبرهنة نكتب:

$$|t_n^A(f,1) - f(1)| =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\ O\left[\frac{(2k+\alpha+\beta+1)\Gamma(k+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(k+\beta+1)}\right.$$
$$\times\left\{2O(n^{\alpha})o\left(\frac{\Gamma(n+\beta+1)\xi(n)}{(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)n^{\alpha}}\right)\right.$$
$$\left.\left.+ 2O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)\ o\left(\frac{\Gamma(n+\beta+1)\xi(n)}{(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)n^{-\frac{1}{2}}}\right)\right\}\right]$$
$$= \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\ O\left[\frac{(2k+\alpha+\beta+1)\Gamma(k+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(k+\beta+1)}\right.$$
$$\left.\times\, o\left(\frac{\Gamma(n+\beta+1)\xi(n)}{(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}\right)\right]$$

أي أن:

$$|t_n^A(f,1) - f(1)| = \ \xi(n)$$

$$\int_{-1}^{+1}|t_n^A(f,1) - f(1)|dx = o\big(\xi(n)\big)\int_{-1}^{+1}dx = 2o\big(\xi(n)\big)$$

$$= o\big(\xi(n)\big) \qquad ; \;\; n \longrightarrow \infty$$

عندئذٍ:

$$\|t_n^A(f,1) - f(1)\|_{L_{[-1,+1]}} = o\big(\xi(n)\big) \;\; ; \;\; n \longrightarrow \infty$$

وبهذا يكون إثبات المبرهنة الثانية قد اكتمل.

التوصيات والمقترحات:

نوصي بدراسة التقريب باستخدام كثيرات حدود أخرى على سبيل المثال دراسة التقريب باستخدام كثيرات حدود هرميت بمتغيرين ودليل واحد في الفضاء $L_{(-\infty,+\infty)}$

وكثيرات حدود لاجير بمتغيرين ودليل واحد في الفضاء $L_{[1,+\infty[}$ حيث نستطيع كتابة:

$$H_n(x,y) = n! \sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{y^r x^{n-2r}}{r!\,(n-2r)!} \;\; , H_n(x,0) = x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x,y) = e^{xt+yt^2}$$

$$L_n(x,y) = n! \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r y^{n-r} x^r}{(n-r)!\,(r!)^2} \quad , L_n(x,0) = (-1)^n \frac{x^n}{n!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n L_n(x,y) = \frac{1}{1-yt} e^{-\frac{xt}{1-yt}}$$

المراجع:

1. **A. Alotibi, M. Mursaleen, 2013 " Applications of Hankel and Regular Matrices in Fourier series ", (1-3)**
2. **G. Szego, 1975, " Orthogonal polynomials ", New York, NY Press Colloquium Publication American Mathematical Society, (440).**
3. **Gradshteyn and I. M. Ryzhik 2007 " Table of integrals series and products "**
4. **T.H Fay and p.Hendrik Kloppers, 2006,"The Gibbs phenomenon for series of orthogonal polynomials "international journal of mathematical education**
5. **N. J. Ford , H. Moayyed, and M. M .Rodrigues,2018, "Orthogonality for a class of generalised Jacobi polynomial $p_v^{(\alpha,\beta)}(x)$, "fractional differential calculus,(95-110)**
6. **Taekyun Kim, Dae San Kim, Jongkyum Kwon, and Dmitry V. Dolgy, 2018, " Expressing Sums of Finite Products of Chebyshev**

Polynomials of the Second Kind and of Fibonacci Polynomials by Several Orthogonal Polynomials " (1-14).

7.محمد عامر , عمر نتوف 2021 " تقريب دوال الفضاء $L_{(-\infty,+\infty)}$ باستخدام كثيرات حدود هرميت وكثيرات حدود تشيبشيف ـــ هرميت " مجلة جامعة البعث المجلد43.