تقريب المربعات الصغرى في فضاءات سوبوليف

طالب الدراسات العليا :علي وطفة

قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة البعث

الدكتور المشرف : محمد عامر

الملخص:

في هذا البحث سنعمم التقريب بالمربعات الصغرى المعروف في الفضاء $L^2(w,[a,b])$ الموزون ليصبح صحيحا في الفضاء $W^{k,p}(w,[a,b])$ مع النظيم :

$$\|f\|^2_{W^{k,p}(\Delta,\mu)} = \sum_{j=0}^{k} \int \left|f^{(j)}\right|^2 d\mu_j \ , \qquad k = 1,2$$

وتقريب بعض التوابع في هذا الفضاء وكتابة برامج باستخدام برنامج **ماثيماتيكا** لتقريبها ومناقشة هذه التقريبات .

كلمات مفتاحية:

المربعات الصغرى , فضاء هلبرت , النظام الخطي , فضاء سوبوليف

Least square approximation in Sobolev Spaces

Abstract :

In this paper we generalize the least square method used in the space $L^2(w,[a,b])$ to become true in the Soboleve space$W^{k,p}(w,[a,b])$ equipped with with the norm :

$$\|f\|^2_{W^{k,p}([\mathrm{a,b}],\mu)} = \sum_{j=0}^{k} \int \left|f^{(j)}\right|^2 d\mu_j \ , \qquad k = 1,2$$

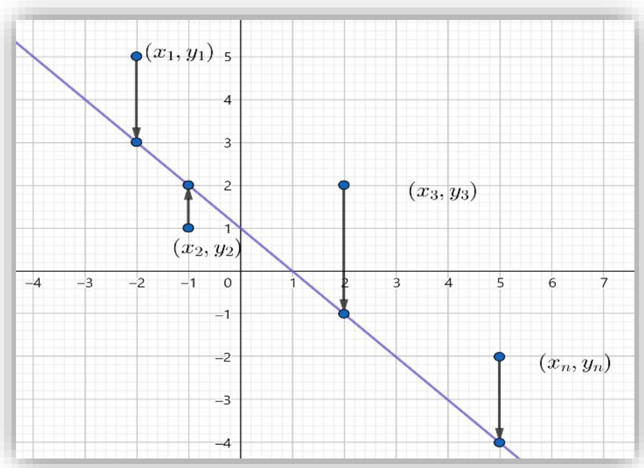
*And give some example in numerical view and write some programs in **MATHEMATICA** to approximate this functions.*

Key words : Least square Method ,Hilbert space ,Lanier system ,Sobolev spaces .

مقدمة:

ما الفرق بين الاستيفاء والتقريب ؟

الاستيفاء هو البحث عن تابع(قد تكون حدودية جبرية او حدودية مثلثية) بحيث يمر من جميع النقاط المعطاة مثلاً اذا كان لدينا خمس نقاط فالحدودية الواجب ايجادها ستكون من الدرجة الرابعة وهكذا اذا كانت لدينا n نقطة معطاة فالحدودية الواجب ايجادها من الدرجة n-1 وهنا نعلم ان إمكانية الاستيفاء موجودة لكن نسبة الخطأ المرتكب قد تكون كبيرة جدأ



الشكل (1,1)

كما انها مكلفة حسابياً لذلك نستخدم التقريب والذي يعتمد على اختيار تابع (قد يكون حدودية او حدودية مثلثية او حدودية اسية) بحيث قد يمر من النقاط المعطاة وقد لايمر ولكن الشرط هوان يكون الخطأ الكلي (حيث الخطأ الكلي هو مجموع الأخطاء لكل النقاط والخطأ هو بعد النقطة عن التابع)أصغر ما يمكن والشكل (1) يوضح ذلك

اذا ما هو التقريب ؟

هو اختيار تابع بحيث يكون الخطأ الكلي أصغر ما يمكن ضمن النظيم المعطى (نظيم سوبوليف المذكور أعلاه) بحيث يكون الخطأ المرتكب اصغر ما يمكن

<u>تعاريف ومفاهيم أساسية :</u>

تعريف(1) [1] : نقول عن التابع $w(x)$ انه تابع وزن اذا حقق :

1- w تابع مستمر على المجال $[a,b]$

2- $w(x) > 0 \, , \forall x \in [a,b]$

3- $\forall x \in [a,b], \forall n \in \mathbb{N}, \int_a^b w(x). |x|^n dx < \infty$

تعريف (2) [1] :الفضاء $\boldsymbol{L^2(w,[a,b])}$ الموزون هو صف كل التوابع القيوسة على المجال $[a,b]$ التي تحقق :

$$\|f\|_{L^2(w,[a,b])} := \left(\int_a^b |f(x)|^2 . w(x) dx\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

تعريف (3) [1]: (الجداء الداخلي في الفضاء $L^2(w,[a,b])$)بفرض التابعين $f(x), g(x) \in L^2(w,[a,b])$ عندئذ سنعرف الجداء الداخلي الموزون(المثقل) بالشكل :

$$< f, g >_w := \int_a^b f(x). g(x). d\mu$$

حيث $d\mu = w(x)dx$

تعريف (4) [4] :نقول عن التابعين $f(x), g(x)$ انهما متعامدين اذا تحقق :

$$< f, g >_w := \int_a^b f(x). g(x). d\mu = 0$$

تعريف(5) [5] [1]: (فضاء سوبوليف): هو فضاء كل التوابع التي تنتمي هي ومشتقاتها لفضاء ليبيغ وتحقق :

$$\|f\|^2_{W^{k,2}([a,b],\mu)} = \sum_{j=0}^{k} \int \left|f^{(j)}\right|^2 d\mu_j < \infty$$

حيث $d\mu_i = w_i dx$ و $w = (w_0, w_1, \dots, w_k)$

ملاحظة (1): الجداء الداخلي في فضاء سوبوليف يصبح بالشكل :

$$(f, g)_{w^{k,2}_{(\mu_0,\dots\mu_k),[a.b]}} := \int_a^b f(x). g(x) d\mu_0 + \int_a^b f(x). g(x). d\mu_1 + \cdots + \int_a^b f^{(k)}(x). g^{(k)}(x). d\mu_k$$

حيث: $d\mu_i = w_i(x)dx$ $\quad i = 0, \dots, k$

تعريف (6) [4] : حدوديات لوجندر هي حلول معادلة لوجندر التفاضلية :

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0$$

وتعطى بصيغة رودريغز بالشكل :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d^n x} (x^2 - 1)^n$$

حالة خاصة :

حدوديات ليجندر متعامدة مع الوزن $w(x) = 1$

<u>تقريب المربعات الصغرى في الفضاء $L^2(w,[a,b])$</u> [4] [3] [2]

بفرض $f(x) \in C[a,b]$ و $\phi_0, \phi_1, \dots \phi_n \in C[a,b]$ توابع مستقلة خطياً

وبفرضS مجموعة كل التراكيب الخطية المستقلة من $\{\phi_0, \phi_1, \dots \phi_n\}$ عندئذ :

$$\forall \phi(x) \in S : \phi(x) \coloneqq \sum_{k=0}^{n} c_k \phi_k(x)$$

$$d(f,\phi) \coloneqq \|f - \phi\| = D(c_0, c_1, \dots c_n)$$

حيث$D(c_0, c_1, \dots c_n)$ تابع للعوامل $c_0, c_1, \dots c_n$

أي ان المسافة بين الدالتين fوϕ تعتمد على التابع ϕ ومعاملاته

ان المسافة d يجب ان تكون أصغر ما يمكن .

أي يجب ان يكون مشتقها الأول بالنسبة للثوابت_$c_i, i = 0, \dots, n$ معدوم

$$\min_{\phi \in S} D^2(c_0, \dots, c_n) = \min_{\phi \in S} \int_a^b \big(f(x) - \phi(x, c_0, \dots, c_n)\big)^2 w(x) dx$$

لنطبق الشرط :

$$\frac{\partial D^2}{\partial c_i} = 0 \,, \qquad i = 0, \dots, n$$

$$\frac{\partial}{\partial c_i}\left(\int_a^b \big(f(x) - \phi(x, c_0, \dots, c_n)\big)^2 w(x)dx\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial c_i}\left(\int_a^b \left(f(x) - \sum_{i=0}^{n} c_i \phi_i(x)\right)^2 w(x)dx\right) = 0$$

$$-2\int_a^b \phi_i(x)\left(f(x) - \sum_{j=0}^{n} c_j \phi_j(x)\right) w(x)\,dx = 0$$

$$\int_a^b \phi_i(x)\left(\sum_{j=0}^{n} c_j \phi_j(x)\right) w(x)\,dx = \int_a^b \phi_i(x) f(x) w(x)\,dx$$

$$\sum_{i=0}^{n} c_i \underbrace{\int_a^b \phi_i(x)\phi_j(x)w(x)\,dx}_{<\phi_i,\phi_j>_w} = \underbrace{\int_a^b f(x)\phi_i(x)w(x)\,dx}_{<f,\phi_j>_w}$$

حيث $< f, \phi_j >_w$ و $< \phi_i, \phi_j >_w$ الجداء الداخلي الموزون في الفضاء $L^2(w, [a, b])$

ومنه ينتج النظام الخطي الاتي:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} (\phi_0, \phi_0) & \cdots & (\phi_0, \phi_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\phi_n, \phi_0) & \cdots & (\phi_n, \phi_n) \end{pmatrix}}_{G} . \underbrace{\begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}}_{C} = \underbrace{\begin{pmatrix} (f, \phi_0) \\ \vdots \\ (f, \phi_n) \end{pmatrix}}_{A}$$

ومنه تصبح المسألة حل النظام السابق بالشكل :

$$\boldsymbol{C = A.G^{-1}}$$

حيث $\boldsymbol{G^{-1}}$ هو مقلوب المصفوفة $\boldsymbol{G}$

والخطأ المرتكب في هذا الفضاء يكتب بالشكل :

$$E_{L^2(w,[a,b])} = \sqrt{\int_a^b \left(f(x) - \phi(x)\right)^2 w(x)dx}$$

في الفقرة التالية سنعمم هذا التقريب ليصبح في الفضاء $W^{1.2}(w,[a,b])$

<u>تقريب المربعات الصغرى في الفضاء $\boldsymbol{W^{1,2}(w,[a,b])}$:</u>

بفرض $f(x) \in C[a,b]$ و $\phi_0, \phi_1, \dots \phi_n \in C[a,b]$ توابع مستقلة خطياً
وبفرضS مجموعة كل التراكيب الخطية المستقلة من $\{\phi_0, \phi_1, \dots \phi_n\}$ عندئذ :

$$\forall \phi(x) \in S: \phi(x) \coloneqq \sum_{k=0}^{n} c_k \phi_k(x)$$

كما في الفقرة السابقة سنبحث عن $\phi(x)$ بحيث يكون المسافة(الفرق) اصغر ما يمكن

$$\min_{\phi \in S} D^2(c_0, \dots, c_n)$$
$$= \min_{\phi \in S} \int_a^b \left(f(x) - \phi(x, c_0, .., c_n)\right)^2 w_0(x)dx + \int_a^b \left(f'(x) - \phi'(x, c_0, .., c_n)\right)^2 w_1(x)dx$$

لنطبق الشرط :

$$\frac{\partial D^2}{\partial c_i} = 0\,, \qquad i = 0, \dots, n$$

$$\frac{\partial}{\partial c_i}\left(\int_a^b \big(f(x) - \phi(x, c_0, \dots, c_n)\big)^2 w_0(x)dx + \int_a^b \big(f'(x) - \phi'(x, c_0, \dots, c_n)\big)^2 w_1(x)dx \right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial c_i}\left(\int_a^b \left(f(x) - \sum_{i=0}^{n} c_i \phi_i(x)\right)^2 w_0(x)dx + \int_a^b \left(f'(x) - \sum_{i=0}^{n} c_i \phi_i{}'(x)\right)^2 w_1(x)dx \right) = 0$$

$$-2\int_a^b \phi_i(x)\left(f(x) - \sum_{j=0}^{n} c_j \phi_j(x)\right) w_0(x)\,dx - 2\int_a^b \phi_i{}'(x)\left(f'(x) - \sum_{j=0}^{n} c_j \phi'{}_j(x)\right) w_1(x)\,dx = 0$$

$$\int_a^b \phi_i(x)\left(\sum_{j=0}^{n} c_j \phi_j(x)\right) w_0(x)\,dx + \int_a^b \phi'{}_i(x)\left(\sum_{j=0}^{n} c_j \phi'{}_j(x)\right) w_1(x)\,dx = \int_a^b \phi_i(x) f(x) w_0(x)\,dx + \int_a^b \phi'{}_i(x) f'(x) w_1(x)\,dx$$

ومنه :

$$\sum_{i=0}^{n} c_i \underbrace{\left(\int_a^b \phi_i(x)\phi_j(x)w_1(x)\,dx + \int_a^b \phi'_i(x)\phi'_j(x)w_0(x)\,dx\right)}_{<\phi_i,\phi_j>_{W^{1,2}(w,[a,b])}}$$
$$= \underbrace{\int_a^b \big(f(x)\phi_i(x)w_0(x) + f'(x)\phi'_i(x)w_1(x)\big)\,dx}_{<f,\phi_j>_{W^{1,2}(w,[a,b])}}$$

حيث $<\phi_i,\phi_j>_{W^{1,2}(w,[a,b])}$ و $<f,\phi_j>_{W^{1,2}(w,[a,b])}$ الجداءات الداخلية الموزونة في الفضاء $W^{1,2}(w,[a,b])$

ومنه ينتج النظام الخطي الاتي:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} (\phi_0,\phi_0) & \cdots & (\phi_0,\phi_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\phi_n,\phi_0) & \cdots & (\phi_n,\phi_n) \end{pmatrix}}_{G} . \underbrace{\begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}}_{C} = \underbrace{\begin{pmatrix} (f,\phi_0) \\ \vdots \\ (f,\phi_n) \end{pmatrix}}_{A}$$

ومنه تصبح حل المسألة هو حل النظام المسابق بالشكل :

$$\boldsymbol{C = A.G^{-1}}$$

حيث $\boldsymbol{G^{-1}}$ هو مقلوب المصفوفة $\boldsymbol{G}$

والخطأ المرتكب في هذا الفضاء يكتب بالشكل :

$$\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{W^{2,1}(w,[a,b])}} = \sqrt{\int_a^b \big(f(x)-\phi(x)\big)^2 w_0(x)dx + \int_a^b \big(f'(x)-\phi'(x)\big)^2 w_1(x)dx}$$

تقريب المربعات الصغرى في الفضاء $W^{2,2}(w,[a,b])$

بفرض $f(x) \in C[a,b]$ و $\phi_0, \phi_1, \dots \phi_n \in C[a,b]$ توابع مستقلة خطياً

وبفرضS مجموعة كل التراكيب الخطية المستقلة من $\{\phi_0, \phi_1, \dots \phi_n\}$ عندئذ :

$$\forall \phi(x) \in S: \phi(x) \coloneqq \sum_{k=0}^{n} c_k \phi_k(x)$$

كما في الفقرة السابقة سنبحث عن $\phi(x)$ بحيث تكون المسافة(الفرق) اصغر ما يمكن

$$\begin{aligned}\min_{\phi \in S} D^2(c_0, \dots, c_n) \\ &= \min_{\phi \in S} \int_a^b \big(f(x) - \phi(x, c_0, .., c_n)\big)^2 w_0(x)dx \\ &+ \int_a^b \big(f'(x) - \phi'(x, c_0, .., c_n)\big)^2 w_1(x)dx \\ &+ \int_a^b \big(f''(x) - \phi''(x, c_0, .., c_n)\big)^2 w_2(x)dx\end{aligned}$$

لنطبق الشرط :

$$\frac{\partial D^2}{\partial c_i} = 0\,, \qquad i = 0, \dots, n$$

$$\frac{\partial}{\partial c_i}\left(\int_a^b \left(f(x)-\phi(x,c_0,..,c_n)\right)^2 w_0(x)dx \right.$$
$$+\int_a^b \left(f'(x)-\phi'(x,c_0,..,c_n)\right)^2 w_1(x)dx$$
$$\left.+\int_a^b \left(f''(x)-\phi''(x,c_0,..,c_n)\right)^2 w_2(x)dx\right)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial c_i}\left(\int_a^b \left(f(x)-\sum_{i=0}^{n} c_i\phi_i(x)\right)^2 w_0(x)dx\right.$$
$$+\int_a^b \left(f'(x)-\sum_{i=0}^{n} c_i\phi_i{}'(x)\right)^2 w_1(x)dx$$
$$\left.+\int_a^b \left(f''(x)-\sum_{i=0}^{n} c_i\phi_i{}''(x)\right)^2 w_2(x)dx\right)=0$$

$$-2\int_a^b \phi_i(x)\left(f(x)-\sum_{j=0}^{n} c_j\phi_j(x)\right)w_0(x)\,dx$$
$$-2\int_a^b \phi'_i(x)\left(f(x)-\sum_{j=0}^{n} c_j\phi'_j(x)\right)w_1(x)\,dx$$
$$-2\int_a^b \phi''_i(x)\left(f(x)-\sum_{j=0}^{n} c_j\phi''_j(x)\right)w_2(x)\,dx=0$$

$$\int_a^b \phi_i(x)\left(\sum_{j=0}^{n} c_j\phi_j(x)\right)w_0(x)\,dx + \int_a^b \phi'_i(x)\left(\sum_{j=0}^{n} c_j\phi'_j(x)\right)w_1(x)\,dx + \int_a^b \phi''_i(x)\left(\sum_{j=0}^{n} c_j\phi''_j(x)\right)w_2(x)\,dx$$
$$= \int_a^b \phi_i(x)f(x)w_0(x)\,dx + \int_a^b \phi'_i(x)f(x)w_1(x)\,dx + \int_a^b \phi''_i(x)f(x)w_2(x)\,dx$$

ومنه:

$$\sum_{i=0}^{n} c_i \underbrace{\left(\int_a^b \phi_i(x)\phi_j(x)w_0(x)\,dx + \int_a^b \phi'_i(x)\phi'_j(x)w_1(x)\,dx + \int_a^b \phi'_i(x)\phi'_j(x)w_2(x)\,dx\right)}_{<\phi_i,\phi_j>_{W^{2,2}(w,[a,b])}}$$
$$= \underbrace{\int_a^b \Big(f(x)\phi_i(x)w_0(x) + f'(x)\phi'_i(x)w_1(x) + f''(x)\phi''_i(x)w_2(x)\Big)\,dx}_{<f,\phi_j>_{W^{2,2}(w,[a,b])}}$$

حيث $< \phi_i, \phi_j >_{W^{2,2}(w,[a,b])}$ و $< f, \phi_j >_{W^{2,2}(w,[a,b])}$ الجداءات الداخلية الموزونة في الفضاء $W^{2,2}(w,[a,b])$

ومنه ينتج النظام الخطي الاتي:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} (\phi_0,\phi_0) & \cdots & (\phi_0,\phi_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\phi_n,\phi_0) & \cdots & (\phi_n,\phi_n) \end{pmatrix}}_{G} . \underbrace{\begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}}_{C} = \underbrace{\begin{pmatrix} (f,\phi_0) \\ \vdots \\ (f,\phi_n) \end{pmatrix}}_{A}$$

ومنه تصبح حل المسألة هو حل النظام المسابق بالشكل :

$$\boldsymbol{C = A.G^{-1}}$$

والخطأ المرتكب في هذا الفضاء يكتب بالشكل :

$$\boldsymbol{E_{W^{2,2}(w,[a,b])}} =$$

$$\sqrt{\int_a^b \left(f(x) - \phi(x)\right)^2 w_0(x)dx + \int_a^b \left(f'(x) - \phi'(x)\right)^2 w_1(x)dx + \int_a^b \left(f''(x) - \phi''(x)\right)^2 w_2(x)dx}$$

مثال$\boldsymbol{(1)}$: لنقرب التابع $f(x) = \cos x$ على المجال $[0,1]$ حيث

$$w(x) = \{w_0(x) = 1, w_1(x) = 1, w_2(x) = 1, w_3(x) = 1, w_4(x) = 1\}$$

وحيث $\phi(x) = \{\phi_0(x) = 1, \phi_1(x) = x, \phi_2(x) = x^2, \phi_3(x) = x^3, \phi_4(x) = x^4\}$

أي لنبحث عن الامثال c_i في : $\phi(x) \coloneqq \sum_{i=0}^{2} c_i \phi_i(x)$

باستخدام الكود (1) عندها يصبح النظام الخطي بالشكل :

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{4}{3} & \frac{5}{4} & \frac{6}{5} & \frac{7}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{4} & \frac{83}{15} & \frac{23}{3} & \frac{341}{35} \\ \frac{1}{4} & \frac{6}{5} & \frac{23}{3} & \frac{488}{35} & \frac{161}{8} \\ \frac{1}{5} & \frac{7}{6} & \frac{341}{35} & \frac{161}{8} & \frac{9827}{315} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8414709848078965 \\ -0.07792440345582419 \\ -2.0461457005669237 \\ -2.788634412151917 \\ -3.444921137668768 \end{pmatrix}$$

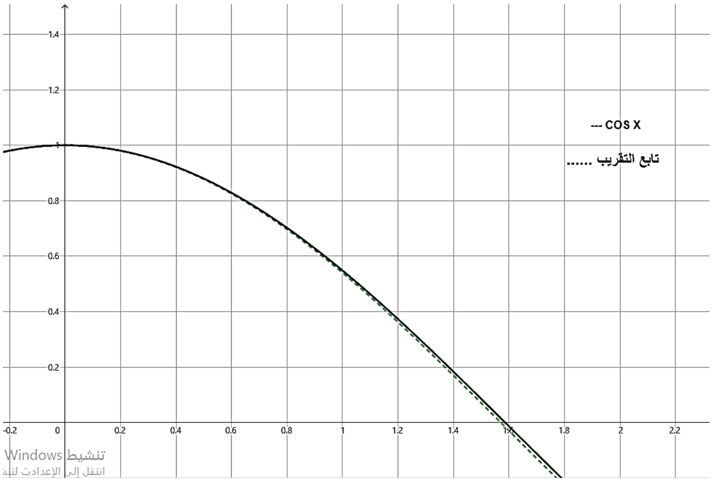
ومنه
$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0000020941617245 \\ 4.768200213556284 \times 10^{-7} \\ -0.5017177747540105 \\ 0.006096822056544937 \\ 0.03591852486681102 \end{pmatrix}$$

وتصبح الحدودية : $\phi(x) = 1.0000020941617245 +$
$4.768200213556284 \times 10^{-7}x - 0.5017177747540105x^2 +$
$0.006096822056544937x^3 + 0.03591852486681102x^4$

ويكون الخطأ المرتكب :

$$E_{W^{2,2}(w,[a,b])} = 0.0015074832199614716$$

الشكل (2) يوضح الخط البياني لـ $\cos x$ و $\phi(x)$



الشكل (2)

مناقشة الكلفة الحسابية والدقة : نلاحظ ان الدقة عالية لكن الكلفة الحسابية مرتفعة أي زمن التنفيذ عالي وهو 6.4ثانية (حيث استخدمنا تعليمة abslutiming)لحساب الوقت الذي تستغرقه وحدة المعالجة المركزية لتنفيذ الكود .

الان: ماذا لو حللنا المثال السابق باستخدام حدوديات لوجندر على المجال $[-1,1]$ حيث

$$w(x) = \{w_0(x) = 1, w_1(x) = 1, w_2(x) = 1, w_3(x) = 1, w_4(x) = 1\}$$

$$\phi(x) = \{L_0(x) = 1, L_1(x) = x,$$

$$L_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), L_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - x), L_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)\}$$

باستخدام الكود (2) و (3)عندها يصبح النظام الخطي بالشكل :

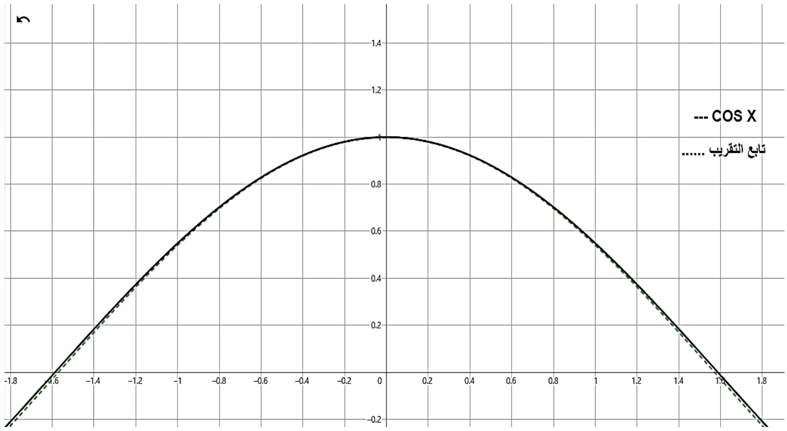
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8}{3} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{122}{5} & 0 & 66 \\ 0 & 2 & 0 & \frac{1136}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 66 & 0 & \frac{6392}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.682941969615793 \\ 0. \\ -6.979908086508669 \\ 0. \\ -14.165863961743849 \end{pmatrix}$$

ومنه
$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8414709848078965 \\ 0. \\ -0.3100445465917291 \\ 0. \\ 0.008866346217113963 \end{pmatrix}$$

وتصبح الحدودية : $\phi(x) = 0.8414709848078965 - 0.3100445465917291x^2 + 0.008866346217113963x^4$

ويكون الخطأ المرتكب :

$$E_{W^{2,2}(w,[a,b])} = 0.049273618130178254$$



الشكل (3)

مناقشة الكلفة الحسابية والدقة : نلاحظ ان الدقة مقبولة والكلفة الحسابية منخفضة بسبب التعامد (حيث إن G تحتوي الكثير من الاصفار) والوقت المستهلك من وحدة المعالجة المركزية في الحاسب هو 1.3 ثانية

توصيات ومقترحات : بعد البحث والحساب نوصي بتعميم النتائج السابقة على حدويات مختلفة (لاكير مثلا او تشيبيشيف)وذلك باستخدام اوزان مختلفة والتعميم أيضا على فضاءات سوبوليف حيث $k>2$

أكواد برنامج Mathematica المستخدمة :

كود المثال الأول :

```
f[x_]=Cos[x];

G=Table[∫_0^1 x^(i+j) ⅆx ∫_0^1 (i*j)*x^(i+j-2) ⅆx
,{i,0,2},{j,0,2}];

G1=Transpose[G]

a=Table[∫_0^1 f[x]*x^i ⅆx ∫_0^1 f'[x]*(i) x^(i-1) ⅆx
,{i,0,2}];

c=a.Inverse[G1];

poly={1,x,x^2};

f1[x_]=c.poly

Erorsobolev=\[Sqrt](∫_0^1 (f1[x]-f[x])^2 ⅆx +
∫_0^1 (D[f1[x]-f[x],x])^2 ⅆx );

N[Erorsobolev];

Plot[{f1[x],Cos[x]},{x,0,1}]
```

كود المثال الثاني :

```
f[x_]=Cos[x];
```

G=Table[$\int_0^1 x^\wedge(i+j)\,dx\int_0^1(i*j)*x^\wedge(i+j-2)\,dx+\int_0^1(i*j)*(i-1)*(j-1)*x^\wedge(i+j-4)\,dx$,{i,0,4},{j,0,4}];

a=Table[$\int_0^1 f[x]*x^\wedge i\,dx+\int_0^1 f'[x]*(i)\,x^\wedge(i-1)\,dx+\int_0^1 f''[x]*(i*(i-1))\,x^\wedge(i-2)\,dx$,{i,0,4}];

c=a.Inverse[G];

poly={1,x,x^2,x^3,x^4};

f1[x_]=c.poly;

Erorsobolev=\[Sqrt]($\int_0^1(f1[x]-f[x])^\wedge 2\,dx+\int_0^1(f1'[x]-f'[x])^\wedge 2\,dx+\int_0^1(f1''[x]-f''[x])^\wedge 2\,dx$);

N[Erorsobolev]

Plot[{f1[x],Cos[x]},{x,0,1}]

كود حدوديات لوجندر :

f[x_]=Cos[x];

```
G=Table[∫_{-1}^{1} LegendreP[i, x] * LegendreP[j, x] ⅆx +
∫_{-1}^{1} D[LegendreP[i, x], x] * D[LegendreP[j, x], x] ⅆx +
∫_{-1}^{1} D[LegendreP[i, x], {x, 2}] * D[LegendreP[j, x], {x, 2}] ⅆx
,{i,0,4},{j,0,4}];
a=Table[∫_{-1}^{1} f[x] * LegendreP[i, x] ⅆx +
∫_{-1}^{1} f'[x] * D[LegendreP[i, x], x] ⅆx +
∫_{-1}^{1} f''[x] * D[LegendreP[i, x], {x, 2}] ⅆx ,{i,0,4}];
c=a.Inverse[G];
poly={1,x,x^2,x^3,x^4};

f1[x_]=c.poly;
Erorsobolev=\[Sqrt](∫_{-1}^{1} (f1[x] - f[x])^2 ⅆx +
∫_{-1}^{1} (f1'[x] - f'[x])^2 ⅆx +
∫_{-1}^{1} (f1''[x] - f''[x])^2 ⅆx
);
N[Erorsobolev]
Plot[{f1[x],Cos[x]},{x,0,1}]
```

المراجع :

[1] RODRIGUIZ,**Weierstass Theorem in weighted Sobolev spaces** .Journal of approximation theory , New York ,108 (2002)(P1..P4)

[2] Abdi, H. (**2007**). The method of least squares. Encyclopedia of Measurement and Statistics. CA, USA: Thousand Oaks.

[3] Miller, S. J. (**2017**). ***The method of least squares***. In The Probability Lifesaver (pp. 625-635). Princeton University Press.

[4] Phillips, G. M. (**2003**). ***Interpolation and approximation by polynomials*** (Vol. 14). Springer Science & Business Media.

[5] Leoni, G. **(2017).** ***A first course in Sobolev spaces***. American Mathematical Soc..