حل مسألة الاهتزاز القسري للغشاء المرن الموصوف بمسألة القيمة الحدية غير المتجانسة بواسطة تحويل هانكل

طالبة الدكتوراه: رقية رضوان

معيدة في قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة البعث

الأستاذ المشرف: أ. د. محمد عامر

ملخّص البحث

درسنا في هذا البحث تعريف تحويل هانكل وذكرنا أهم خواصه وهي تحويل هانكل لمؤثر بيسل التفاضلي حيث إنَّ هذه الخاصة هي الخاصة الرئيسية لتطبيقات تحويل هانكل لحل المعادلات التفاضلية الجزئية.

كما ذكرنا شروط وجود هذا التحويل بالإضافة لحل تطبيق لمعادلة فيزيائية رياضية باستخدام هذا التحويل الذي نحن بصدده والذي ينقلنا من معادلة تفاضلية جزئية إلى معادلة تفاضلية عادية, وهذا التطبيق يتمثل بحل مسألة الاهتزاز القسري(المجبر) للغشاء المرن لمسألة القيمة الحدية غير المتجانسة حيث إنَّ هذا الغشاء يهتز تحت تأثير قوة الإثارة الخارجية المحرضة كما أنَّه سوف يستمر في الاهتزاز طالما يخضع لقوة خارجية نتيجة التعويض المستمر في الطاقة المفقودة.

كلمات مفتاحية:

تحويل هانكل , تحويل فورييه ثنائي البعد , الإحداثيات القطبية , تحويل هانكل من الرتبة الصفرية , معادلة تفاضلية جزئية , معادلة تفاضلية عادية.

Solve the problem of forced vibration of an elastic membrane described by the non-homogeneous boundary value problem by Hankel Transform

Phd.student: **Roqia Rdwan**

Supervised by: **Prof: Mohammad Amer**

Summary

In this paper, we studied the definition of the Hankel transform and mentioned its most important properties, which is the Hankel transform of the Bessel differential operator, as this feature is the main property of the applications of the Hankel transform to solve partial differential equations.

We also mentioned the conditions for the existence of this transformation in addition to solving an application of a physical-mathematical equation using this transformation that we are dealing with, which transfers us from a partial differential equation to an ordinary differential equation, This application is represented in solving the problem of forced (forced) vibration of an elastic membrane to the problem of the non-homogeneous boundary value, as this membrane

vibrates under the effect of the external induced excitation force and will continue to vibrate as long as it is subject to an external force as a result of continuous compensation in the lost energy.

Key Words:

Hankel Transform , Tow Dimensional Fourier Transform , Polar Coordinates , Zero-Order Hankel Transform , Partial Differential Equation , Ordinary Differential Equation .

1 .مقدمة:[1,3]

تحويل هانكل هو تحويل تكاملي يحتوي على دوال بيسل $J_n(x)$ كنواة له في مسائل التناظر المحوري المعرفة في الإحداثيات الاسطوانية (r,θ,z), حيث تعتبر الإحداثيات الاسطوانية مفيدة عند ارتباطها بالأجسام أو الظواهر التي لها بعض التناظر الدوراني حول محور طولي(محور التناظر) , مثل جريان الماء في أنبوب مستقيم ذو مقطع عرضي مستدير, والتوزع الحراري في المعادن الإسطوانية.كما أنَّ هذا التحويل يدرس الدوال التي تعتمد فقط على التناظر المركزي ويشار لهذا التحويل أيضاً بتحويل فورييه– بيسل.

ينشأ تحويل هانكل من تحويل فورييه ثنائي البعد وذلك بعد الانتقال من الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبية, وكونه يعتمد على الإحداثيات القطبية فهو مفيد جداً في حل مسائل التناظر المحوري, كما ويستخدم على نطاق واسع في حل المعادلات التفاضلية الجزئية في الإحداثيات القطبية ذات التماثل المحوري وتطبيقها على مسائل القيم الحدية(الابتدائية). يتم استخدام تحويل هانكل ذو الترتيب الصفري في حل المعادلات التفاضلية الجزئية(PDE), كما أنَّ تحويل هانكل من الرتبة الصفرية غالباً ما يكون مفيد لحل المسائل التي تتضمن معادلة لابلاس في الإحداثيات الاسطوانية ذات التماثل المحوري.

2 . أهمية وهدف البحث:

تكمن أهمية تحويل هانكل في كونه مفيد جداً في حل المعادلات التفاضليّة الجزئيّة(PDE) ذات الشروط الحدية التي يوجد فيها تناظر محوري وبشكل خاص في حل المسائل المطروحة في الإحداثيات الاسطوانية , حيث إنَّ هذا التحويل يقلب المعادلة التفاضلية الجزئية(PDE) إلى معادلة تفاضلية عادية(ODE).

كثيراً ما يستخدم تحويل هانكل كأداة لحل العديد من المسائل العلمية, ويستخدم على نطاق واسع في العديد من المجالات مثل المرونة والبصريات وميكانيك الموائع وعلم الزلازل وعلم الفلك ومعالجة الصور, وكذلك في مجالات أخرى مثل تحليل الموجة والتي تستخدم في المعالجة الرياضية للإشعاع والانحراف.

سنذكر بعض من استخدامات ذلك التحويل في حل المعادلات التفاضلية الجزئية:

1- حل مسألة التوزيع الحراري المستقر في الأنصاف اللانهائية الصلبة والمحتوية على مصدر حراري مستقر.

2- حل مسألة معادلة الانتشار ذات التماثل المحوري.

3- حل مسألة إشعاع الموجات الصوتية ذات التماثل المحوري.

4- حل مسألة المعادلة التوافقية المزدوجة ذات التماثل المحوري.

5- حل مسألة كوشي-بواسون للموجة المائية المتماثلة محورياً.

وسنخص هذا البحث في حل مسألة الاهتزاز القسري للغشاء المرن الموصوف بمسألة القيمة الحدية غير المتجانسة باستخدام تحويل هانكل.

3. طرائق البحث: تعاريف ومفاهيم أساسيّة:

3.1. دوال بيسل ($\boldsymbol{Bessel\ function}$) [4]:

تعطى معادلة بيسل التفاضلية بالشكل:

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - v^2)y = 0$$

وهي معادلة تفاضلية عادية من المرتبة الثانية بأمثال غير ثابتة وحلولها $J_v(x)$ وتسمى دوال بيسل أو الدوال الاسطوانية.

إنَّ معادلة بيسل نشأت من معادلة لابلاس $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ لذلك فإنَّ لحلولها تطبيقات هامة ومتعددة في المسائل الفيزيائية والهندسية.

أول من عرّف دوال بيسل $J_v(x)$ العالِم الرياضي دانييل برنولي ثمَّ عممت من قبل فريدريش بيسل ($Friedrich\ Wilhelm\ Bessel$), تُعرف دوال بيسل أيضاً بالدوال الاسطوانية

وذلك لأنها تمثل الحل لمعادلة لابلاس في الإحداثيات الاسطوانية, لذا فإنَّ دوال بيسل ذات أهمية كبرى لمسائل انتشار الموجات على سبيل المثال أنماط التذبذب في جسم دائري(حلقي) غشاء صناعي مثل الطبلة.

وتعرفّ دالة بيسل بالشكل:

$$J_v(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+v}}{m!\,\Gamma(m+v+1)} \quad ; v \geq 0$$

حيث v عدد اختياري إما حقيقي أو مركب. ولكن الحالة الخاصة التي نهتم بها أن يكون v حقيقي, والحالة الأكثر انتشاراً عندما تكون v عدد صحيح أو عدد نصف صحيح.

4. النتائج ومناقشتها:

4.1. تعريف تحويل هانكل $(Hankel\ Transform)$[3]:

لتكن $f(r)$ دالة معرّفة لأجل $r \geq 0$ عندئذٍ, يُعرَّف تحويل هانكل بالترتيب v للدالة $f(r)$ بالشكل:

$$\tilde{F}_v(s) = H_v\{f(r)\} = \int_0^{\infty} rJ_v(sr)f(r)\,dr \quad ; \ v > -\frac{1}{2}$$

حيث $rJ_v(sr)$ نواة تحويل هانكل كما أنَّ $r \geq 0$ و $J_v(sr)$ دالة بيسل من النوع الأول والترتيب v.

ومعظم الحالات الخاصة لتحويل هانكل تتوافق مع $v = 0\,, v = 1$

ويُعرَّف التحويل العكسي لتحويل هانكل بالشكل:

$$f(r) = {H_v}^{-1}\{\tilde{F}_v(s)\} = \int_0^\infty sJ_v(sr)\tilde{F}_v(s)\,ds \quad ; \; v > -\frac{1}{2}$$

4.2. شروط وجود تحويل هانكل [4], [2]:

لتكن $f(r)$ دالة معرَّفة على المجال $]0,\infty[$, عندئذٍ الشروط الكافية وغير اللازمة لوجود تحويل هانكل هي:

1− الدالة $f(r)$ مستمرة قطعياً $(piecewise\ continuous)$.

2− $f(r)$ محدودة التغير (ذات تغيرات محدودة) $(bounded\ variation)$ في كل فترة جزئية محدودة $(finite\ subinterval)$ في المجال $]0,\infty[$.

3 − $\int_0^\infty |f(r)| r^{\frac{1}{2}}\,dr < \infty$

4 − $f(r) = O(r^{-k})\,; r \to \infty \;; k > \frac{3}{2}$

5 − $f'(r)$ مستمرة قطعياً على كل فترة جزئية فرعية محدودة على $]0,\infty[$

4.3. بعض من خصائص تحويل هانكل:

4.3.1. تحويل هانكل لمؤثر بيسل التفاضلي[1]:

إذا كان $H_v\{f(r)\} = \tilde{F}_v(s)$ فإنَّ:

$$H_v\left\{\left(\nabla^2 - \frac{v^2}{r^2}\right) f(r)\right\} = H_v\left\{\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{df}{dr}\right) - \frac{v^2}{r^2} f(r)\right\} = -s^2\tilde{F}_v(s)$$

حيث إنَّ الدالة $f(r)$ محدودة عند كل قيم r والدالة f ومشتقاتها تساوي الصفر عند اللانهاية أي $rf(r), rf'(r) \to 0$ عندما $r \to 0,\infty$

الإثبات:

$$H_v\left\{\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{df}{dr}\right)-\frac{v^2}{r^2}f(r)\right\}=$$
$$=\int_0^\infty rJ_v(sr)\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{df}{dr}\right)-\frac{v^2}{r^2}f(r)\right]dr$$
$$=\int_0^\infty J_v(sr)\left(\frac{d}{dr}\left(r\frac{df}{dr}\right)\right)dr-v^2\int_0^\infty\frac{1}{r}J_v(sr)f(r)\,dr$$

بالمكاملة بالتجزئة للحد الأول نحصل على:

$$H_v\left\{\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{df}{dr}\right)-\frac{v^2}{r^2}f(r)\right\}=r\frac{df}{dr}J_v(sr)\Big|_0^\infty$$
$$-s\int_0^\infty\left(r\frac{d}{dr}J_v(sr)\right)\frac{df}{dr}dr-v^2\int_0^\infty\frac{1}{r}J_v(sr)f(r)\,dr$$

الحد الأول معدوم وذلك من الفرض ومنه:

$$H_v\left\{\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{df}{dr}\right)-\frac{v^2}{r^2}f(r)\right\}=-s\int_0^\infty\left(r\frac{d}{dr}J_v(sr)\right)\frac{df}{dr}dr$$
$$-v^2\int_0^\infty\frac{1}{r}J_v(sr)f(r)\,dr$$

بالمكاملة بالتجزئة للحد الأول نحصل على:

$$H_v\left\{\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{df}{dr}\right)-\frac{v^2}{r^2}f(r)\right\}=-s\,rf(r)\frac{d}{dr}J_v(sr)\Big|_0^\infty$$
$$+\int_0^\infty s\frac{d}{dr}J_v(sr)f(r)\,dr+\int_0^\infty s^2r\frac{d^2}{dr^2}J_v(sr)f(r)dr$$
$$-v^2\int_0^\infty\frac{1}{r}J_v(sr)f(r)\,dr$$

الحد الأول معدوم من الفرض ومنه:

$$H_v\left\{\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{df}{dr}\right)-\frac{v^2}{r^2}f(r)\right\}=$$
$$=\int_0^\infty\frac{1}{r}\left[s^2r^2\frac{d^2}{dr^2}J_v(sr)+sr\frac{d}{dr}J_v(sr)-v^2J_v(sr)\right]f(r)\,dr$$

نعلم أنَّ معادلة بيسل تعطى بالشكل:

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - v^2)y = 0$$

بمطابقة المعادلة

$$s^2r^2\frac{d^2}{dr^2}J_v(sr) + sr\frac{d}{dr}J_v(sr) - v^2J_v(sr)$$

مع معادلة بيسل نجد:

$$(sr)^2\frac{d^2}{dr^2}J_v(sr) + (sr)\frac{d}{dr}J_v(sr) + ((sr)^2 - v^2)J_v(sr) = 0$$

ومنه:

$$(sr)^2\frac{d^2}{dr^2}J_v(sr) + (sr)\frac{d}{dr}J_v(sr) - v^2J_v(sr) = -s^2r^2J_v(sr)$$

ومنه:

$$H_v\left\{\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{df}{dr}\right) - \frac{v^2}{r^2}f(r)\right\} = -s^2\int_0^\infty rJ_v(sr)f(r)\,dr$$

$$H_v\left\{\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{df}{dr}\right) - \frac{v^2}{r^2}f(r)\right\} = -s^2H_v\big(f(r)\big) \quad \Rightarrow$$

$$H_v\left\{\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{df}{dr}\right) - \frac{v^2}{r^2}f(r)\right\} = -s^2F_v(s)$$

وهذه الخاصة هي الخاصة الرئيسية لتطبيقات تحويل هانكل لحل المعادلات التفاضلية الجزئية.

4.4. تطبيق تحويل هانكل:

حل مسألة الاهتزاز القسري للغشاء المرن الموصوف بواسطة القيمة الحدية غير المتجانسة ومعادلتها من الشكل:

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r - \frac{1}{c^2}u_{tt} = -\frac{1}{T}P(r,t) \ ; 0 < r < \infty \ ; t > 0 \qquad \dots (4.4.1)$$

$$u(r,0) = f(r) \ \ ; \ \ u_t(r,0) = g(r) \ ; \ \ 0 < r < \infty \qquad \dots (4.4.2)$$

$u(r,t)$ محدودة عند ∞ أي عندما $(r \to \infty)$, علماً أن $c^2 = \frac{T}{\rho}$ و T توتر الغشاء و ρ كثافة سطح الغشاء. وهنا أخذنا بعين الاعتبار أنَّ الحلول لا تعتمد على θ أي أنَّ $\frac{\partial u}{\partial \theta} =$

0 , وذلك لأنَّ الحلول متناظرة مركزياً (أي نتيجة التناظر الدائري حول المركز الهندسي للغشاء فإنَّ $\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0$)

الحل:

المعادلة المعطاة هي معادلة موجية ثنائية البعد وهي من النمط الزائدي.

لدينا $u(r,t)$ تمثل الدالة الموجية والتي بدورها تمثل حل المعادلة وتعبر عن طبيعة اهتزاز الغشاء, كما أنَّها $u(r,t)$ محدودة بسبب الاهتزاز القسري.

المعادلة في حالة الاهتزاز القسري للغشاء يفرض بعض الشروط الحدية هي:

في بداية الزمن $t = 0$ هذا الشرط يقود إلى $u(r,0) = f(r)$ وهو تابع لـِ r فقط كما أنّه من أجل $t = 0$ في بداية الزمن أيضاً فإنَّ $u_t(r,0) = g(r)$ وهي السرعة الابتدائية تكون تابعة لـِ r فقط.

يعرَّف تحويل هانكل من الرتبة الصفرية بالنسبة للدالة $u(r,t)$ بالشكل:

$$\tilde{u}(s,t) = \int_0^\infty r u(r,t) J_0(sr) dr$$

نطبق تحويل هانكل من الرتبة الصفرية على (4.4.1) و (4.4.2) وبتطبيق الخاصة (**4.3.1**) من خواص تحويل هانكل نحصل على:

$$-s^2\tilde{u} = \frac{1}{c^2}\tilde{u}_{tt} - \frac{1}{T}\tilde{P}(s,t) \;\; ; \;\; t > 0$$

$$\tilde{u}_{tt} + c^2 s^2 \tilde{u} = \frac{c^2}{T}\tilde{P}(s,t) \;\; ; t > 0 \qquad \dots (4.4.3)$$

$$\tilde{u}(s,0) = \tilde{f}(s) \;\; ; \;\; \tilde{u}_t(s,0) = \tilde{g}(s) \qquad \dots (4.4.4)$$

المعادلة (4.4.3) معادلة تفاضلية خطية عادية غير متجانسة من الرتبة الثانية بأمثال ثابتة لإيجاد الحل العام لها نفرض الحل على الشكل:

$$\tilde{u}(s,t) = V(s,t) + W(s,t)$$

حيث:

$V(s,t)$ حل المعادلة المتجانسة كما أنه يمثل حل معادلة الاهتزاز الحُر.

$W(s,t)$ حل خاص للمعادلة غير المتجانسة (4.4.3).

بأخذ المعادلة المتجانسة من (4.4.3) وبإيجاد المعادلة المميزة لها نحصل على الحل العام:

$$V(s,t) = c_1 \cos(cst) + c_2 \sin(cst) \qquad \dots (4.4.5)$$

لإيجاد الحل الخاص لغير المتجانسة نستخدم طريقة تغاير البارامترات:

أولاً: نعتبر الثوابت الاختيارية في (4.4.5) دوال تابعة لـِ t :

$$W(s,t) = c_1(t) \cos(cst) + c_2(t) \sin(cst) \qquad \dots (4.4.6)$$

نشتق (4.4.6) بالنسبة لـِ t

$$W'(s,t) = -csc_1(t) \sin(cst) + csc_2(t) \cos(cst)$$
$$+c'_1(t) \cos(cst) + c'_2(t) \sin(cst)$$

نختار كل من الثابتان c_2 , c_1 بحيث إنَّ:

$$c'_1(t) \cos(cst) + c'_2(t) \sin(cst) = 0 \qquad \dots (4.4.7)$$

ومنه:

$$W'(s,t) = -csc_1(t) \sin(cst) + csc_2(t) \cos(cst) \qquad \dots (4.4.8)$$

نشتق مرة ثانية بالنسبة لـِ t

$$W''(s,t) = -(cs)^2 c_1(t) \cos(cst) - (cs)^2 c_2(t) \sin(cst)$$
$$-(cs)c'_1(t) \sin(cst) + (cs)c'_2(t) \cos(cst) \qquad \dots (4.4.9)$$

نعوض (4.4.6) و (4.4.9) بالمعادلة غير المتجانسة (4.4.3) نجد:

$$-c'_1\, sin(cst) + c'_2\, cos(cst) = \frac{c}{sT}\tilde{P}(s,t) \qquad \dots (4.4.10)$$

بحل جملة المعادلتين $(4.4.7)$, $(4.4.10)$ نجد:

من $(4.4.7)$ نجد:

$$c'_1 = -c'_2 \frac{sin(cst)}{cos(cst)}$$

نعوض في $(4.4.10)$ نجد:

$$c'_2 \frac{sin^2(cst)}{cos(cst)} + c'_2\, cos(cst) = \frac{c}{sT}\tilde{P}(s,t)$$

$$c'_2 = \frac{c}{sT} cos(cst)\, \tilde{P}(s,t) \qquad \dots (4.4.11)$$

أيضاً من $(4.4.7)$ نجد:

$$c'_2 = -c'_1 \frac{cos(cst)}{sin(cst)}$$

نعوض في $(4.4.10)$ نجد:

$$-c'_1\, sin(cst) - c'_1 \frac{cos^2(cst)}{sin(cst)} = \frac{c}{sT}\tilde{P}(s,t)$$

$$c'_1 = -\frac{c}{sT} sin(cst)\, \tilde{P}(s,t) \qquad \dots (4.4.12)$$

بمكاملة العلاقتين $(4.4.11)$ و $(4.4.12)$ نحصل على الثابتين c_2, c_1 :

$$c_1 = -\frac{c}{sT}\int_0^t sin(cs\tau)\, \tilde{P}(s,\tau)\, d\tau \qquad \dots (4.4.13)$$

$$c_2 = \frac{c}{sT}\int_0^t cos(cs\tau)\, \tilde{P}(s,\tau)\, d\tau \qquad \dots (4.4.14)$$

نعوض $(4.4.13)$,$(4.4.14)$ في $(4.4.6)$

$$W(s,t) = -\frac{c}{sT}cos(cst)\int_0^t sin(cs\tau)\,\tilde{P}(s,\tau)\,d\tau$$
$$+\frac{c}{sT}sin(cst)\int_0^t cos(cs\tau)\,\tilde{P}(s,\tau)\,d\tau$$

$$W(s,t) = \frac{c}{sT}\int_0^t \tilde{P}(s,\tau)\,[sin(cst)\,cos(cs\tau) - cos(cst)\,sin(cs\tau)]d\tau$$

$$W(s,t) = \frac{c}{sT}\int_0^t \tilde{P}(s,\tau)\,sin\big(cs(t-\tau)\big)\,d\tau \qquad \dots(4.4.15)$$

ومنه الحل العام يصبح بالشكل:

$$\tilde{u}(s,t) = c_1\,cos(cst) + c_2\,sin(cst)$$
$$+\frac{c}{sT}\int_0^t \tilde{P}(s,\tau)\,sin\big(cs(t-\tau)\big)\,d\tau \qquad \dots(4.4.16)$$

لإيجاد c_2, c_1 للمعادلة $(4.4.16)$ نعوض الشروط الابتدائية $(4.4.4)$ نجد:

من الشرط الأول $\tilde{u}(s,0) = \tilde{f}(s)$ في $(4.4.16)$ نجد:

$$c_1 = \tilde{u}(s,0) = \tilde{f}(s) \qquad \dots(4.4.17)$$

من الشرط الثاني $\tilde{u}_t(s,0) = \tilde{g}(s)$ في $(4.4.16)$ نجد:

أولاً سنشتق التكامل في المعادلة $(4.4.16)$ بالنسبة لِ t وذلك من خلال دستور ليبتز لاشتقاق التكامل :

$$\frac{d}{dt}\int_0^t \tilde{P}(s,\tau)\,sin\big(cs(t-\tau)\big)\,d\tau = \tilde{P}(s,t)\,sin\big(cs(t-t)\big)\,(t)'_t$$

$$-\tilde{P}(s,0)\,sin\big(cs(t-0)\big)\,(0)'_t + \int_0^t (cs)\tilde{P}(s,\tau)\,cos\big(cs(t-\tau)\big)\,d\tau$$

ومنه:

$$\frac{d}{dt}\int_0^t \tilde{P}(s,\tau)\,sin\big(cs(t-\tau)\big)\,d\tau = (cs)\int_0^t \tilde{P}(s,\tau)\,cos\big(cs(t-\tau)\big)\,d\tau$$

ومنه مشتق $\tilde{u}(s,t)$ بالنسبة لـِ t

$$\tilde{u}_t(s,t) = -(cs)c_1\,sin(cst) + (cs)c_2\,cos(cst) + \frac{c}{sT}(cs)\int_0^t \tilde{P}(s,\tau)\,cos\big(cs(t-\tau)\big)\,d\tau$$

ومنه من الشرط الثاني: $\tilde{u}_t(s,0) = \tilde{g}(s)$

$$\tilde{g}(s) = \tilde{u}_t(s,0) = csc_2 \quad \Rightarrow \quad c_2 = \frac{1}{cs}\tilde{g}(s) \qquad \ldots(4.4.18)$$

نعوض c_1 , c_2 في $(4.4.16)$ فنحصل على حل مسألة القيمة الابتدائية بالشكل :

$$\tilde{u}(s,t) = \tilde{f}(s)\,cos(cst) + \frac{1}{cs}\tilde{g}(s)\,sin(cst) + \frac{c}{sT}\int_0^t \tilde{P}(s,\tau)\,sin\big(cs(t-\tau)\big)\,d\tau \qquad \ldots(4.4.19)$$

بتطبيق التحويل العكسي على المعادلة $(4.4.19)$ نحصل على:

$$u(r,t) = \int_0^\infty s\tilde{u}(s,t)J_0(sr)\,ds$$

$$u(r,t) = \int_0^\infty s\tilde{f}(s)\,cos(cst)\,J_0(sr)\,ds + \frac{1}{c}\int_0^\infty \tilde{g}(s)\,sin(cst)\,J_0(sr)\,ds + \frac{c}{T}\int_0^\infty \left(\int_0^t \tilde{P}(s,\tau)\,sin\big(cs(t-\tau)\big)\,d\tau\right)J_0(sr)\,ds$$

وهو الحل العام.

وهذا الحل يمثل اهتزازة قسرية مطبق عليها قوة خارجية تتمثل بالتابع $P(r,t)$ هذه الاهتزازة تعاني من تأثير الوسط المحيط الممثل بالحد $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}u(r,t)$

نلاحظ أنَّ التابع $\tilde{P}(s,\tau)$ المقدار السعوي فيه متغير مع الزمن والتغير مع الزمن يتوافق مع القوة القسرية

5. الاستنتاجات والتوصيات

قمنا بحل مسألة الاهتزاز القسري عن طريق تحويل هانكل من الرتبة الصفرية نوصي بحل المسألة المذكورة السابقة عن طريق تحويل هانكل من رتب أعلى وحل تطبيق آخر على ذلك إن أمكن.

6 .مراجع:

[1]− Debnath, L. and Bhatta, D. "Integral Transforms and their Applications", Third Edition, by Taylor&Francis Group,LLG (2015).

[2]− Kumar, P. "A study on Hankel transform and its relation to the Fourier transform", International Journal of Multidisciplinary Research and Development, volume:2, Issue:5, 555-558 May (2015).

[3]− Negero, N. " Zero-Order Hankel Transform Method for Partial Differential Equations ", IJMSET. Volume 3, Issue 10, (2016), pp.24-36.

[4]− Piessens, R. "The Hankel Transform", *The Transforms and Applications Handbook: Second Edition*, Ed.Alexander D.Poularikas Boca Raton. CRC Press LLC,(2000).